

# 第十章 齿轮传动

- § 10-1 齿轮机构的应用及分类
- § 10-2 齿轮的齿廓曲线
- § 10-3 渐开线齿廓的啮合特点
- § 10-4 渐开线标准齿轮的基本参数和几何尺寸
- § 10-5 渐开线直齿圆柱齿轮的啮合传动
- § 10-6 渐开线齿轮的变位修正
- § 10-7 斜齿圆柱齿轮传动
- § 10-8 蜗杆传动
- § 10-9 圆锥齿轮传动

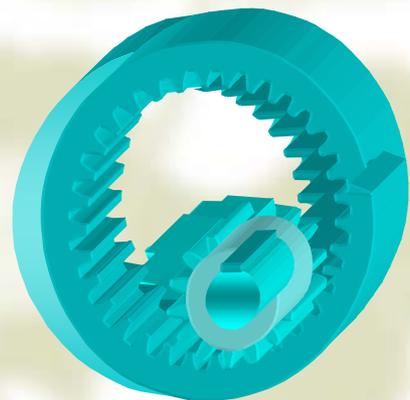
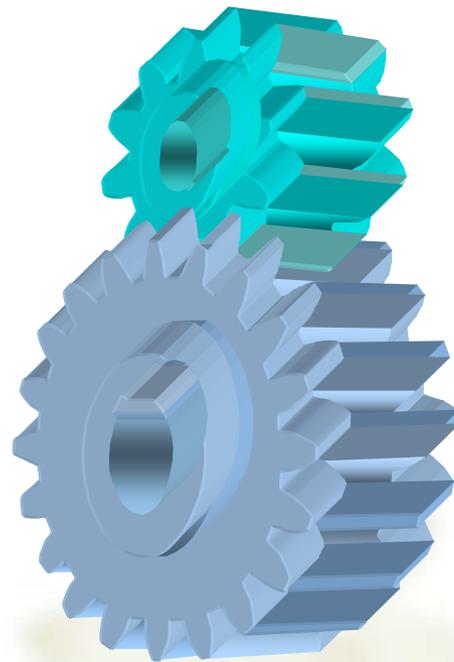
## § 10-1 齿轮机构的应用及分类

### 应用实例:

- ❖ 内燃机、牛头刨床、汽车变速箱
- ❖ 摄像机、游乐设施

### 特点:

- ❖ 可用来传递空间任意两轴之间的运动和动力
- ❖ 功率和速度范围大
- ❖ 传动效率高
- ❖ 传动比准确
- ❖ 使用寿命长，工作安全可靠



# 分类

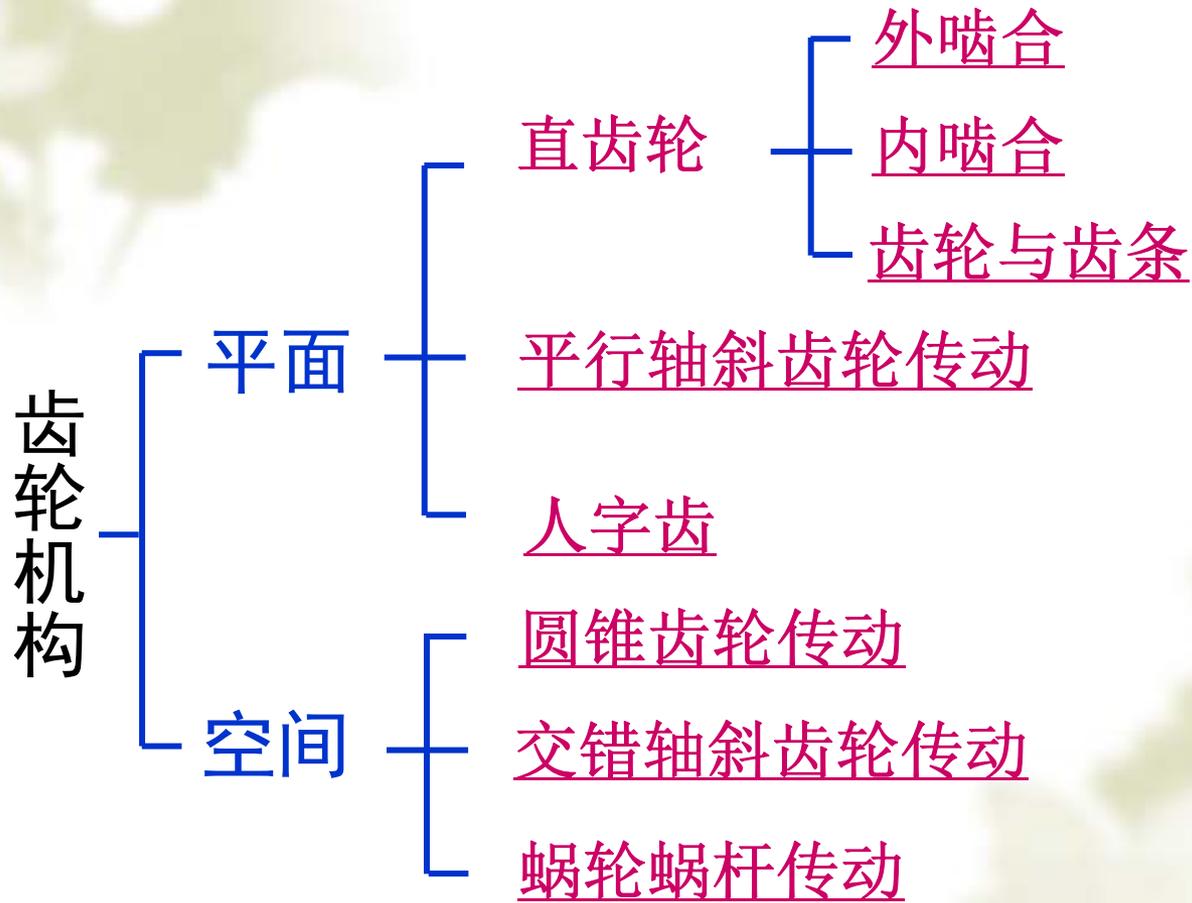
## 按两轴的相对位置分:

- ❖ 平面齿轮机构: (平行轴间传动)
  - ❖ 直齿轮、斜齿轮、人字齿
  - ❖ (外啮合、内啮合、齿轮与齿条传动)
- ❖ 空间齿轮传动:
  - ❖ 圆锥齿轮 (相交轴间传动)
  - ❖ 交错轴斜齿轮、蜗杆蜗轮传动 (交错轴间传动)

## 根据传动比分:

- ❖ 定传动比齿轮机构 (圆形齿轮机构)
- ❖ 变传动比齿轮机构 (非圆齿轮机构)
  - 三角齿轮、矩形齿轮、椭圆齿轮

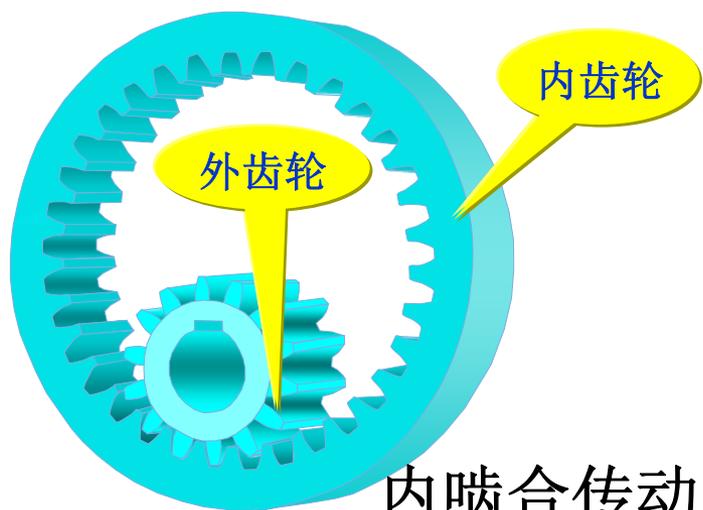
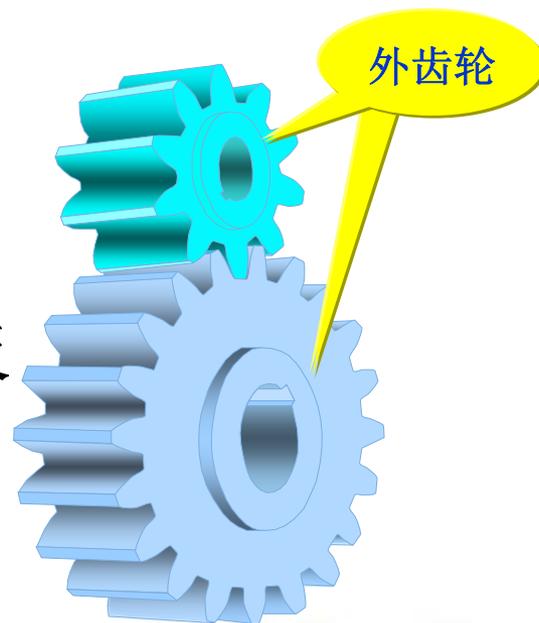
# 分类



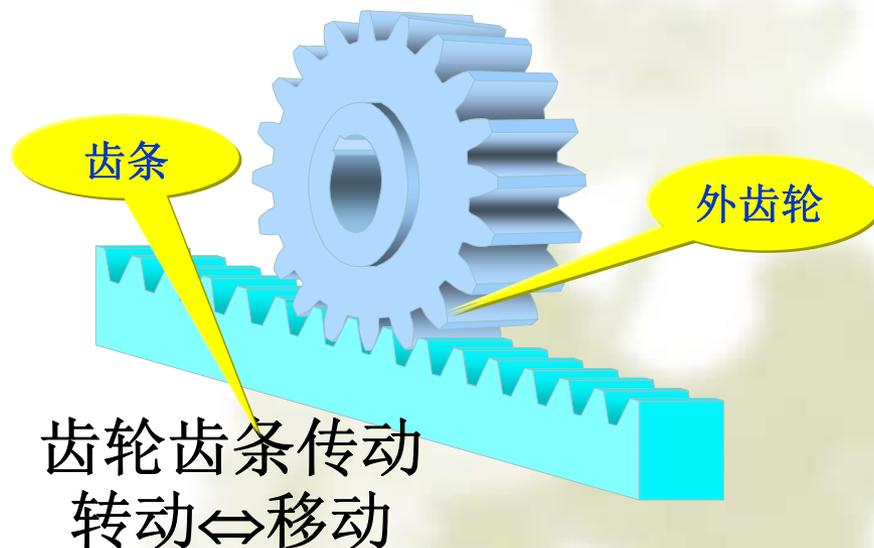
# 1. 平行轴齿轮机构

- ❖ 直齿圆柱齿轮机构
- ❖ 外啮合传动
- ❖ 内啮合传动
- ❖ 齿轮齿条传动

外啮合传动  
两轮转向相反



内啮合传动  
两轮转向相同



齿轮齿条传动  
转动 ↔ 移动

# 斜齿圆柱齿轮机构

- ❖ 外啮合传动
- ❖ 内啮合传动
- ❖ 齿轮齿条传动



## 人字齿轮传动

- ❖ 外啮合传动
- ❖ 内啮合传动
- ❖ 齿轮齿条传动



## 2. 相交轴齿轮机构（圆锥齿轮传动）



直齿圆锥齿轮传动



斜齿圆锥齿轮传动

### 3.交错轴齿轮机构

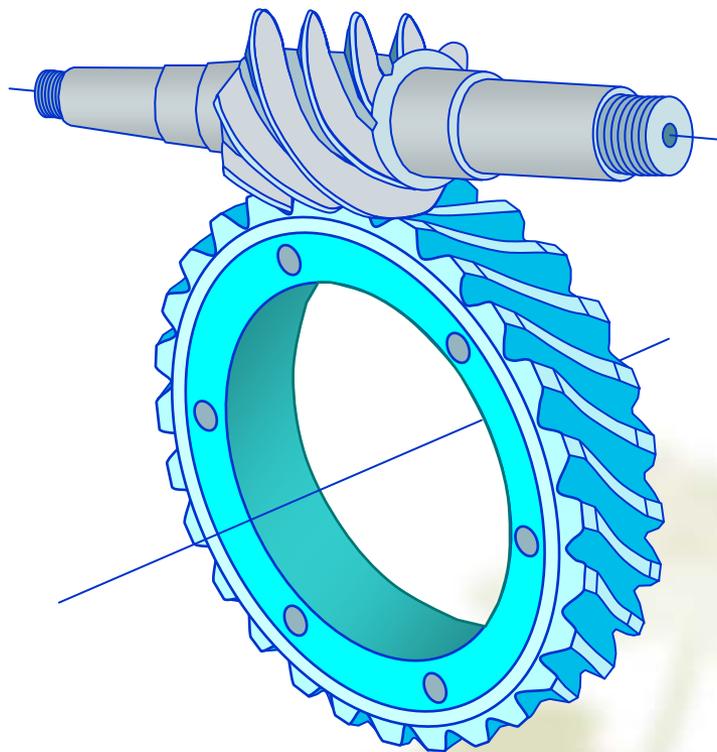
交错轴斜齿轮传动  
(螺旋齿轮传动)



# 蜗杆传动

二轴交错角为 $90^\circ$

蜗杆传动



## § 10-2 齿轮的齿廓曲线

### 1. 齿廓啮合基本定律

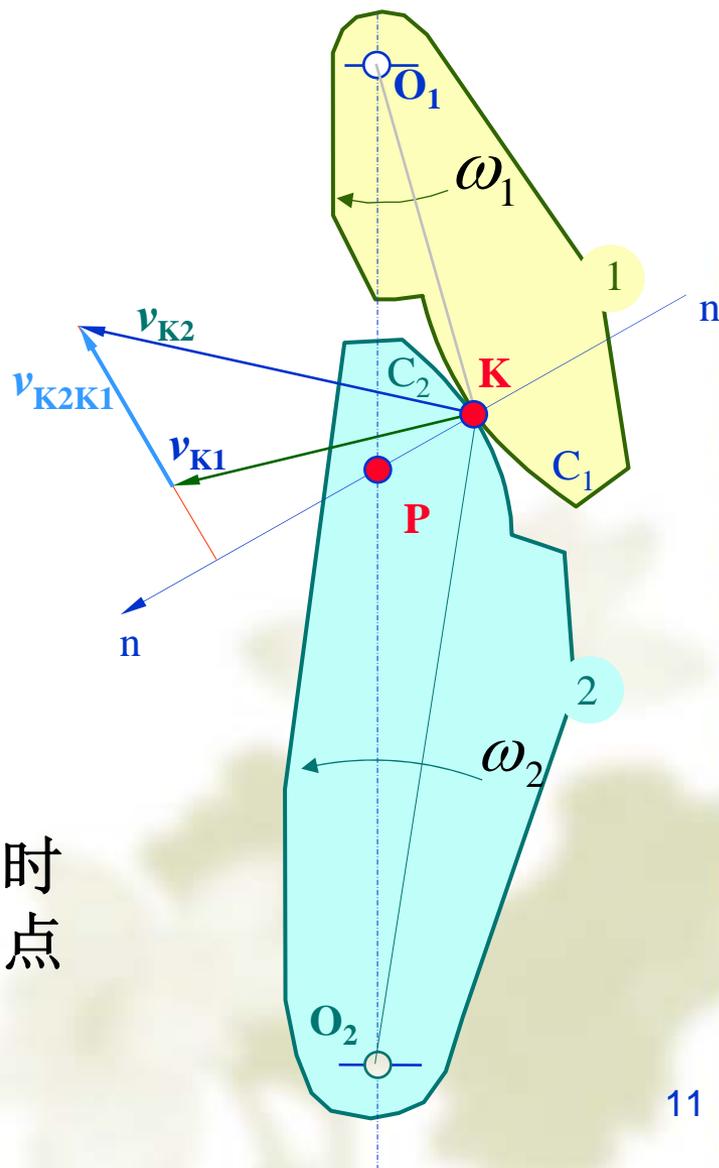
对齿廓曲线的要求:

❖ 法线上没有相对运动

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\overline{O_2P}}{\overline{O_1P}}$$

齿廓啮合基本定律:

❖ 互相啮合的一对齿轮, 在任一位置时的传动比, 都与其连心线被其啮合点的公法线所分两线段成反比



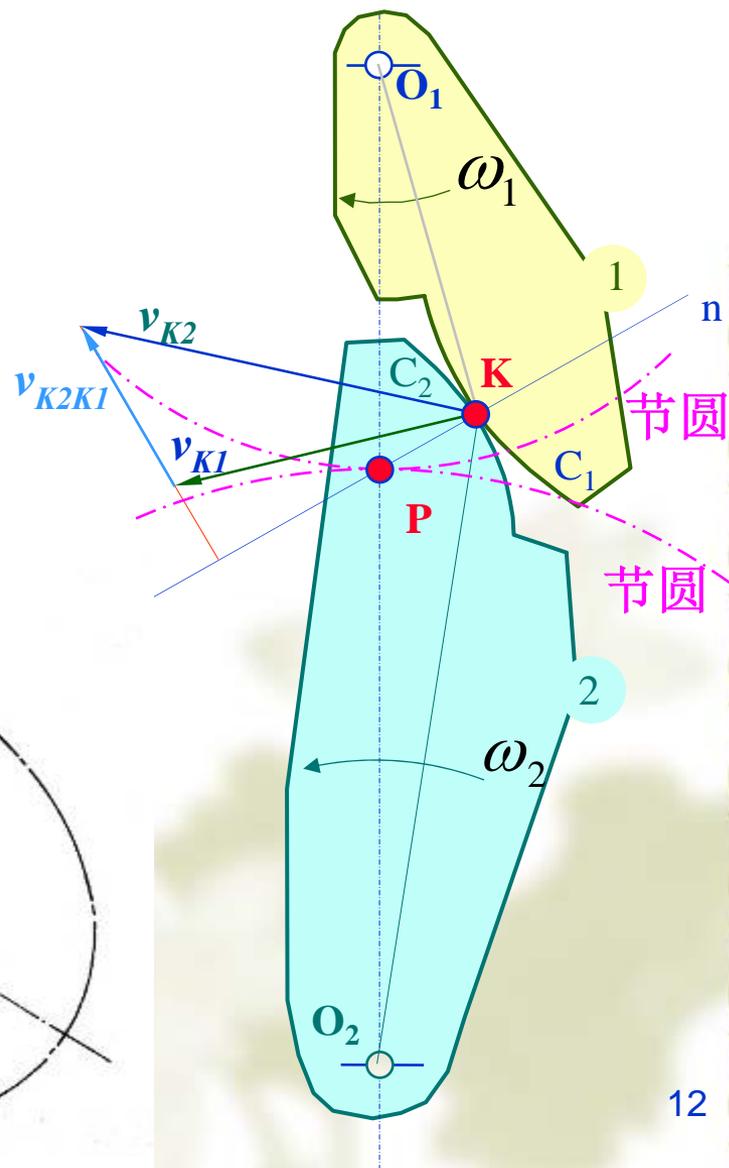
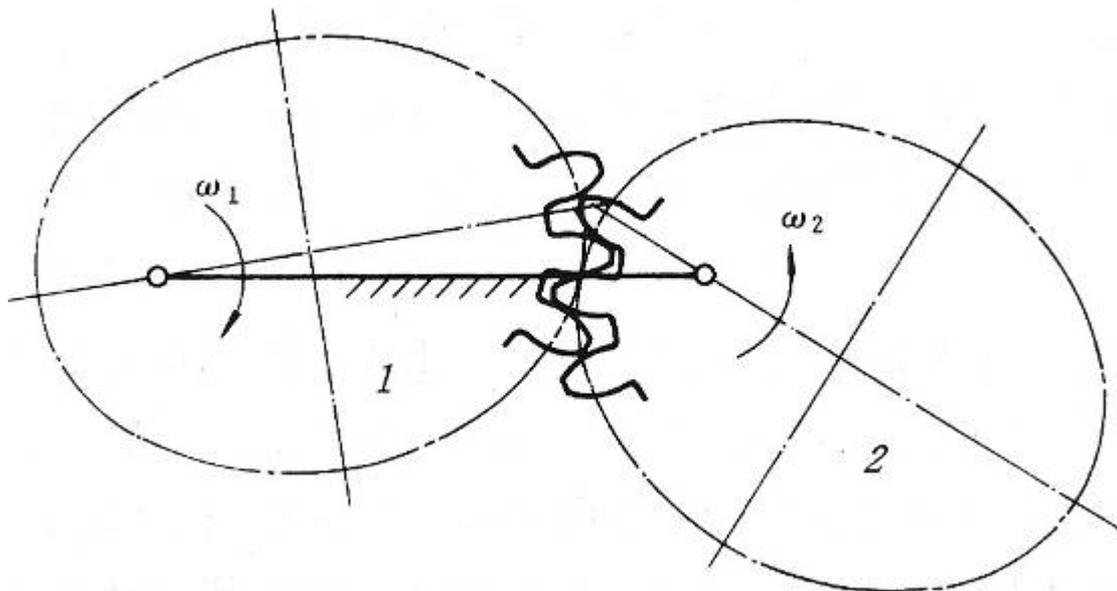
# 节点、节圆、节线

$P$ 点:节点

若要求两轮作定传动比传动

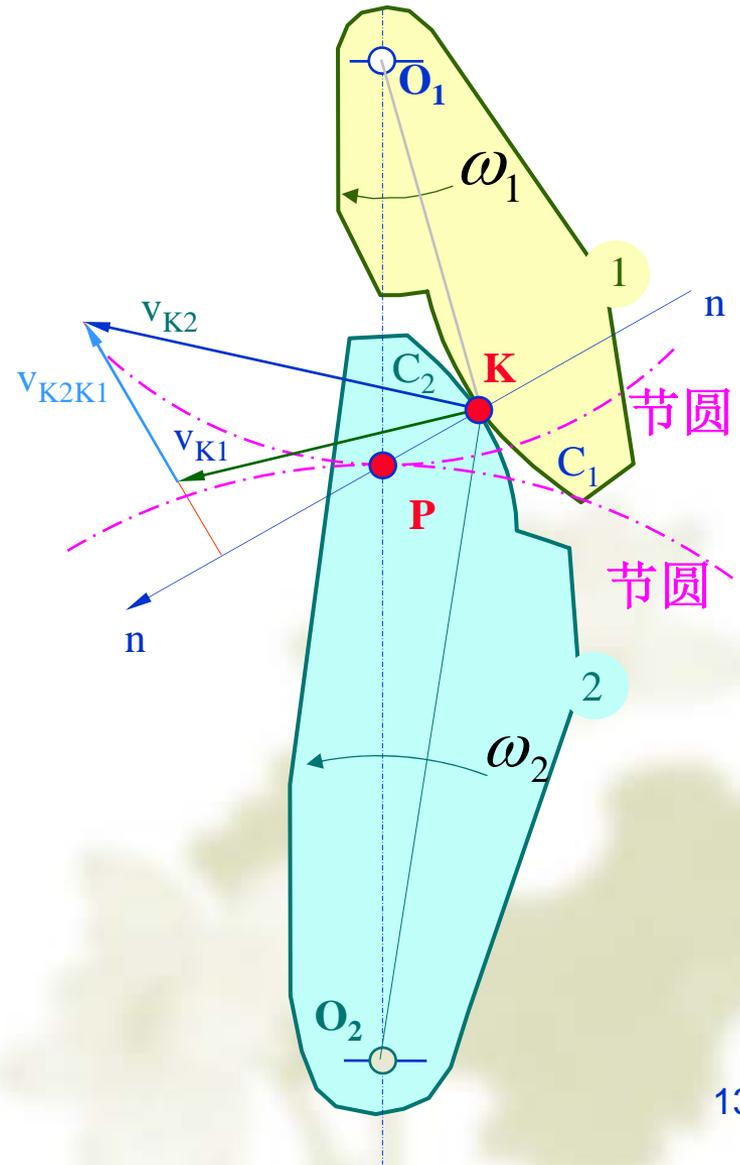
$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\overline{O_2P}}{\overline{O_1P}} = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad P \text{点为定点}$$

定点 $P$ 点的轨迹——节圆 $d_1, d_2$



## 2. 齿廓曲线的选择

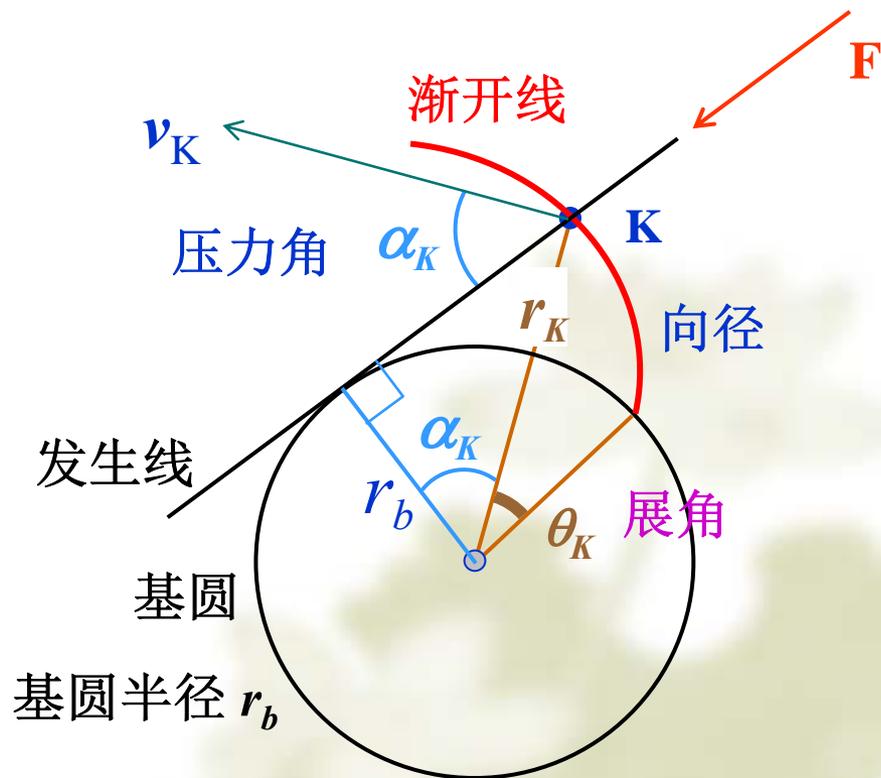
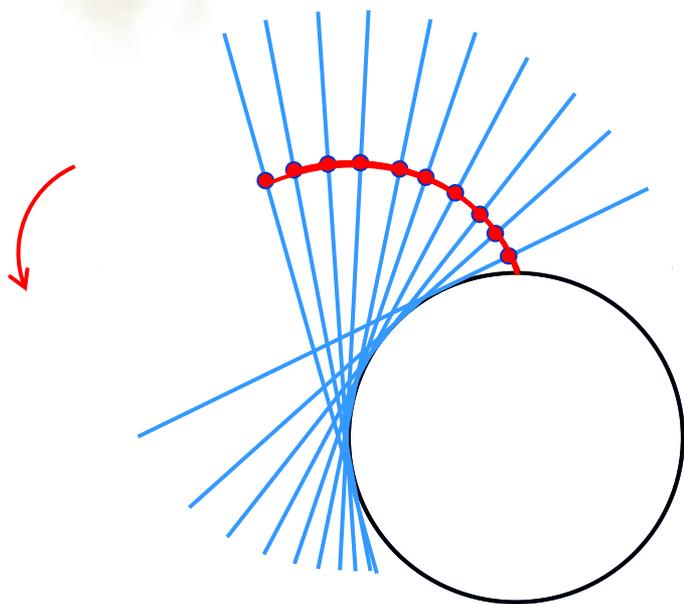
- ❖ **共轭齿廓：**符合齿廓啮合基本定律的一对齿廓
- ❖ **常用：**
- ❖ 渐开线、摆线、变态摆线
- ❖ 圆弧、抛物线



# § 10-3 渐开线齿廓的啮合特点

## 1. 渐开线的形成及其特性

渐开线



## 渐开线的特性：

- 1) 发生线沿基圆滚过的长度等于基圆上被滚过的圆弧长度,即

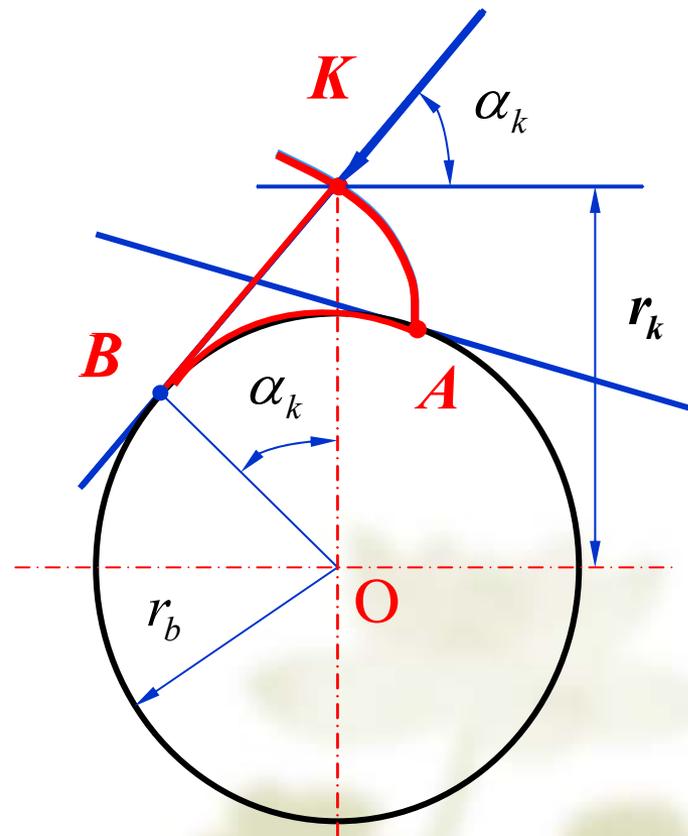
$$\overline{KB} = \widehat{AB}$$

- 2) 渐开线上任一点的法线恒与其基圆相切；

- 3) 切点 $B$ 是渐开线上 $K$ 点的曲率中心， $BK$ 为曲率半径；

- 4) 渐开线的形状取决于基圆的大小；

- 5) 基圆以内无渐开线。

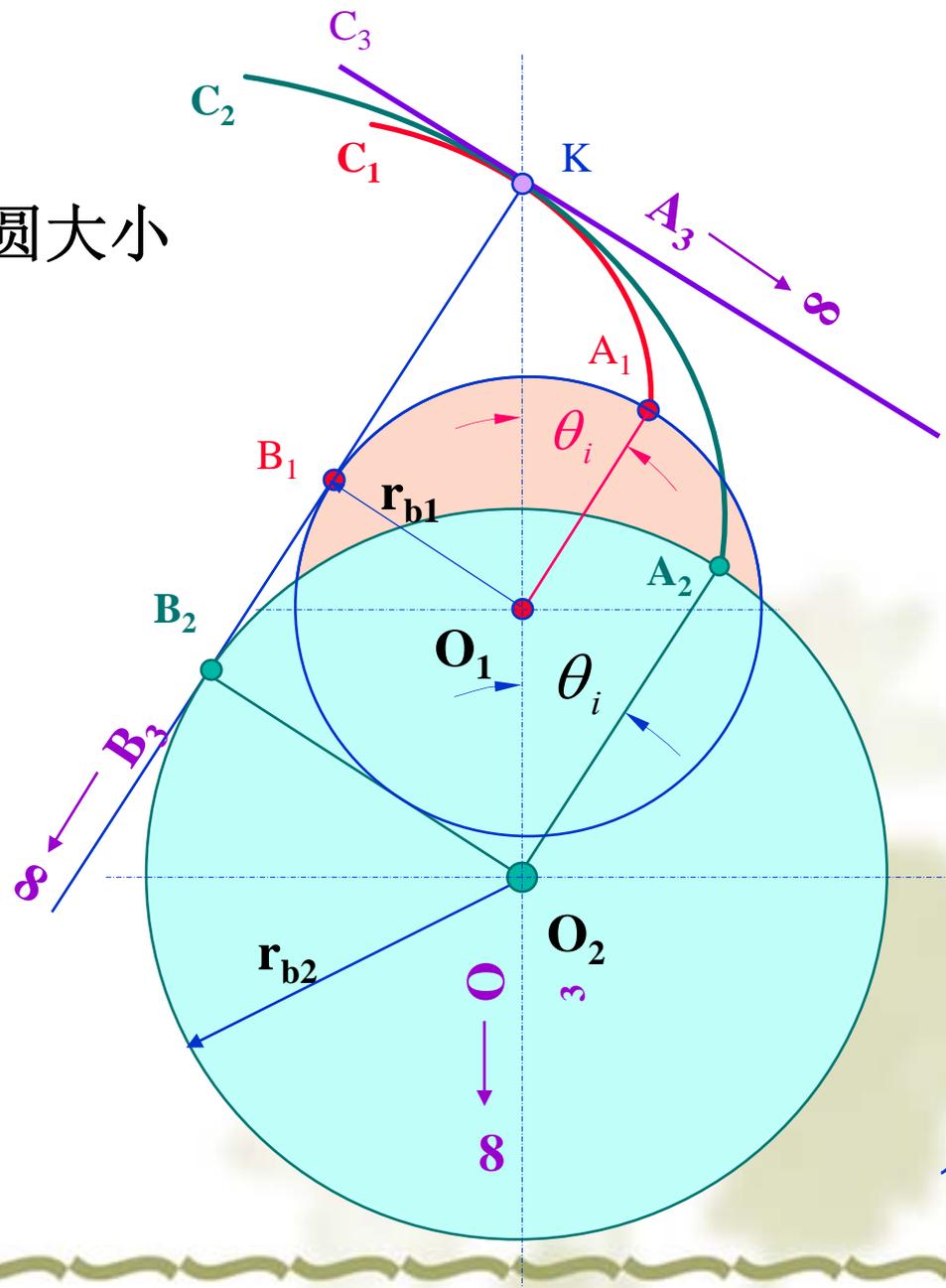


$$\cos \alpha_k = \frac{\overline{OB}}{\overline{OK}} = \frac{r_b}{r_k}$$

## 渐开线的性质(续)

4) 渐开线的形状取决于基圆大小

❖ 直线也是渐开线

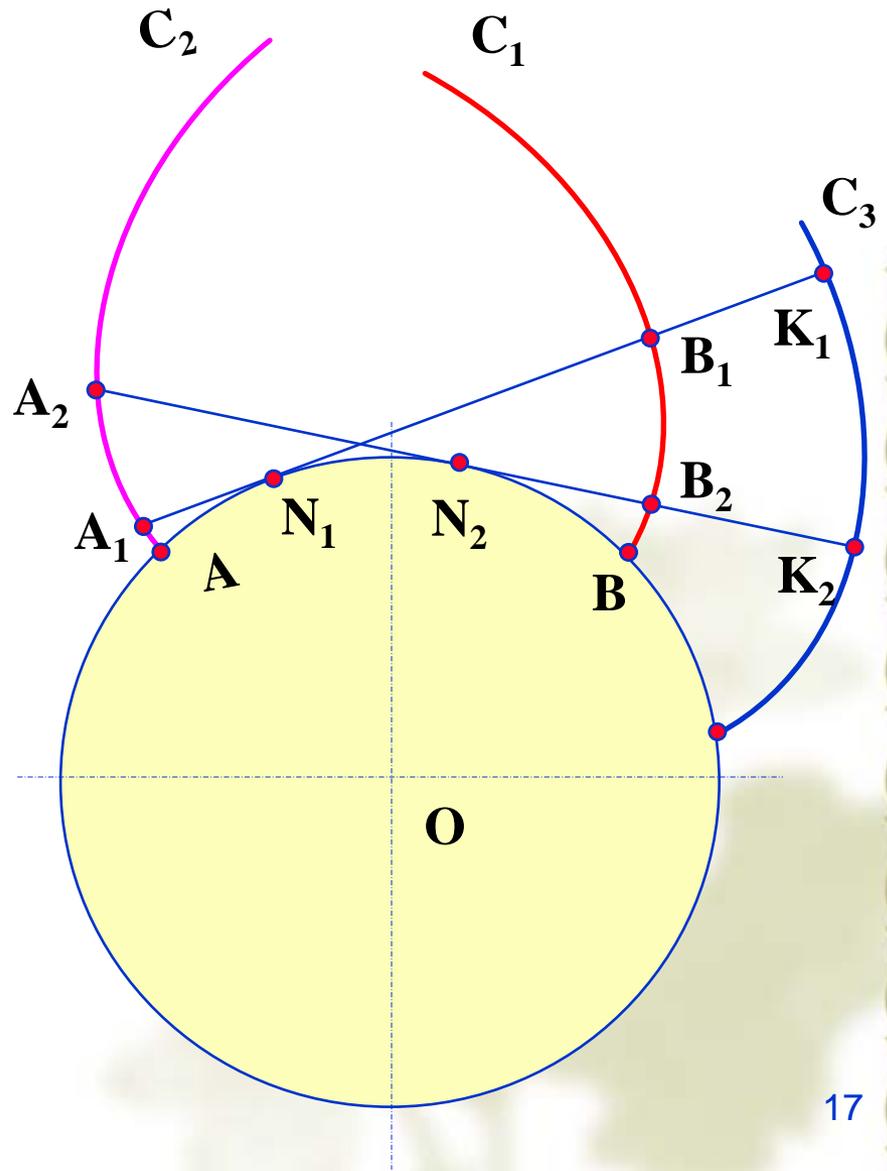


## 推论

同一基圆所生成的同向或  
反向渐开线为法向等距曲线

$$\overline{B_1K_1} = \overline{B_2K_2} \quad ?$$

$$\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2} \quad ?$$



## 2. 渐开线方程式及渐开线函数

- ❖ 极坐标方程:
- ❖  $K$ 点向径 $r_k = ?$  展角 $\theta_k = ?$

$$r_k = \frac{r_b}{\cos \alpha_k}$$

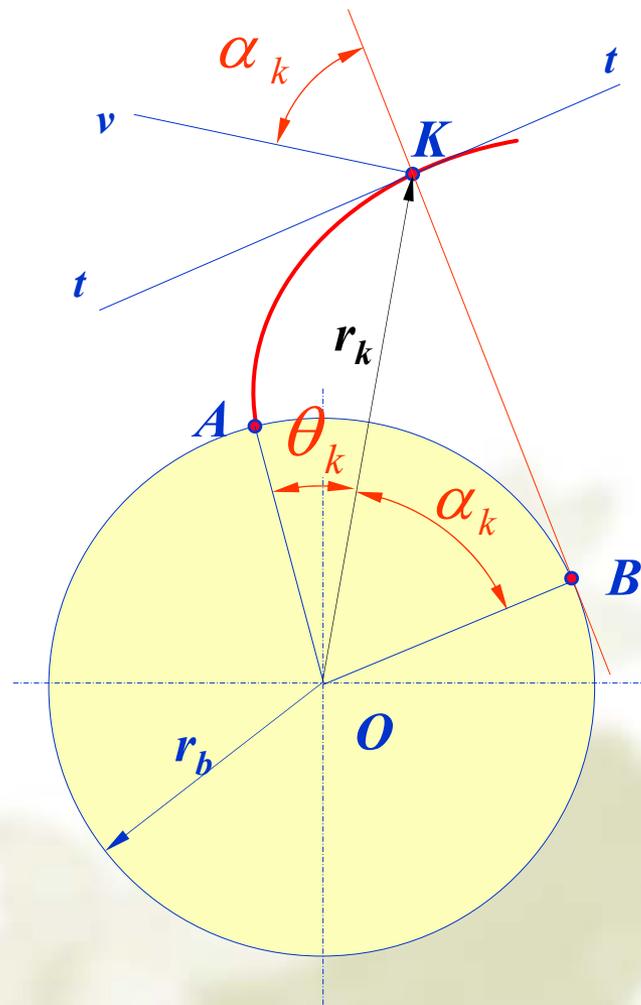
$$\tan \alpha_k = \frac{\overline{BK}}{r_b} = \frac{\widehat{AB}}{r_b} = \frac{r_b(\alpha_k + \theta_k)}{r_b} = \alpha_k + \theta_k$$

$$\theta_k = \tan \alpha_k - \alpha_k$$

- ❖ 工程表示  $\text{inv } \alpha_k = \tan \alpha_k - \alpha_k$

- ❖ 渐开线极坐标参数方程:

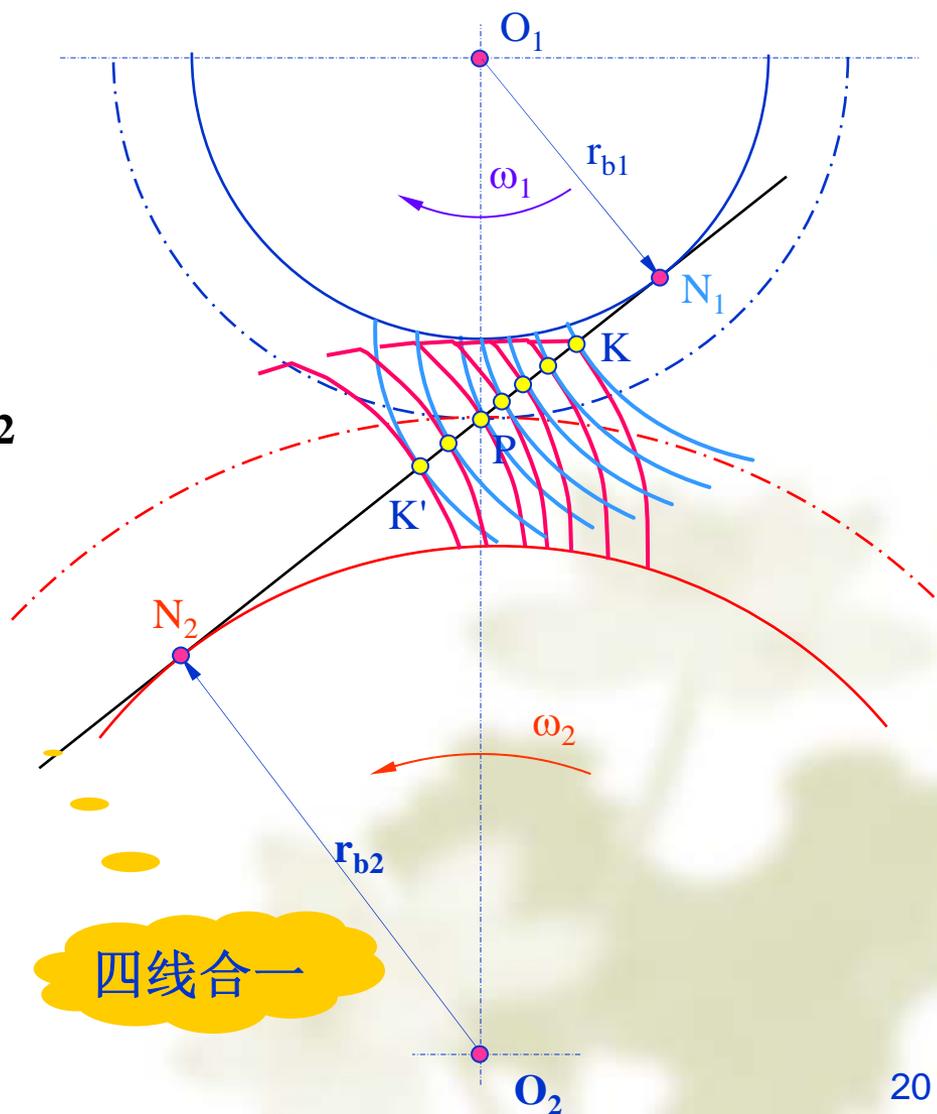
$$\left\{ \begin{array}{l} r_k = \frac{r_b}{\cos \alpha_k} \\ \theta_k = \text{inv } \alpha_k = \tan \alpha_k - \alpha_k \end{array} \right.$$





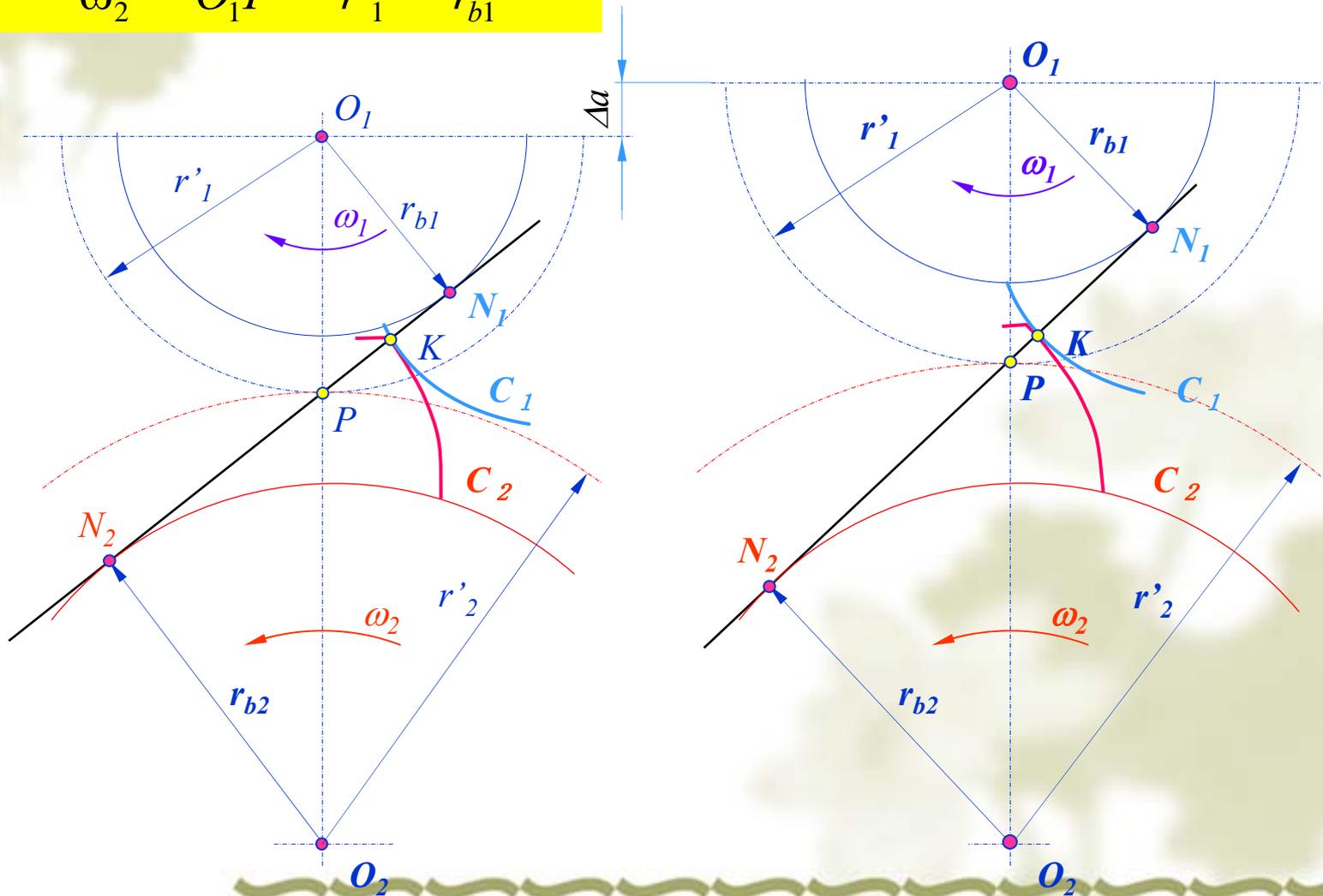
## 3.2 渐开线齿廓传力稳定

- ❖ 啮合点的公法线:  $N_1N_2$
- ❖ 接触点正压力方向:  $N_1N_2$
- ❖ 两基圆的内公切线:  $N_1N_2$
- ❖ 啮合线: 啮合点的轨迹  $N_1N_2$

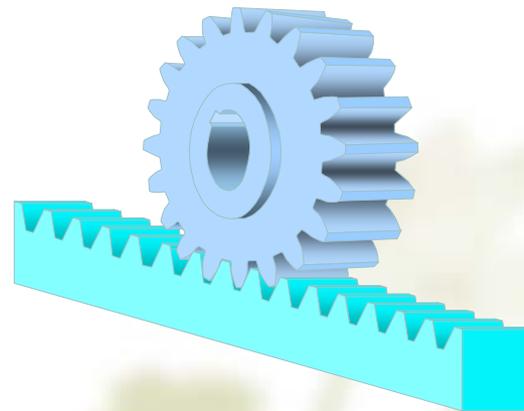
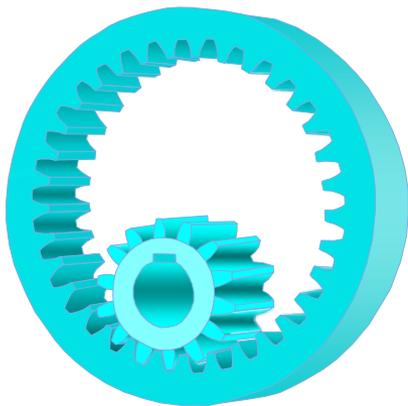
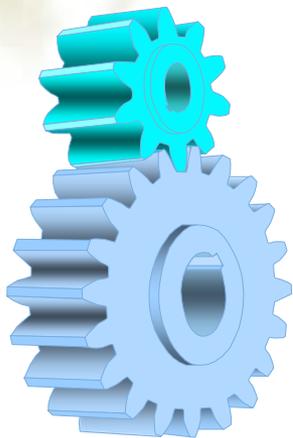


### 3.3 渐开线齿廓传动具有可分性

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P} = \frac{r'_2}{r'_1} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}} = C$$



## § 10-4 渐开线标准齿轮的基本参数和几何尺寸



# 1. 齿轮各部分的名称和符号

❖ 基圆  $d_b (r_b)$

❖ 齿顶圆  $d_a (r_a)$

❖ 齿根圆  $d_f (r_f)$

❖ 齿厚  $s_i$

❖ 齿槽宽  $e_i$

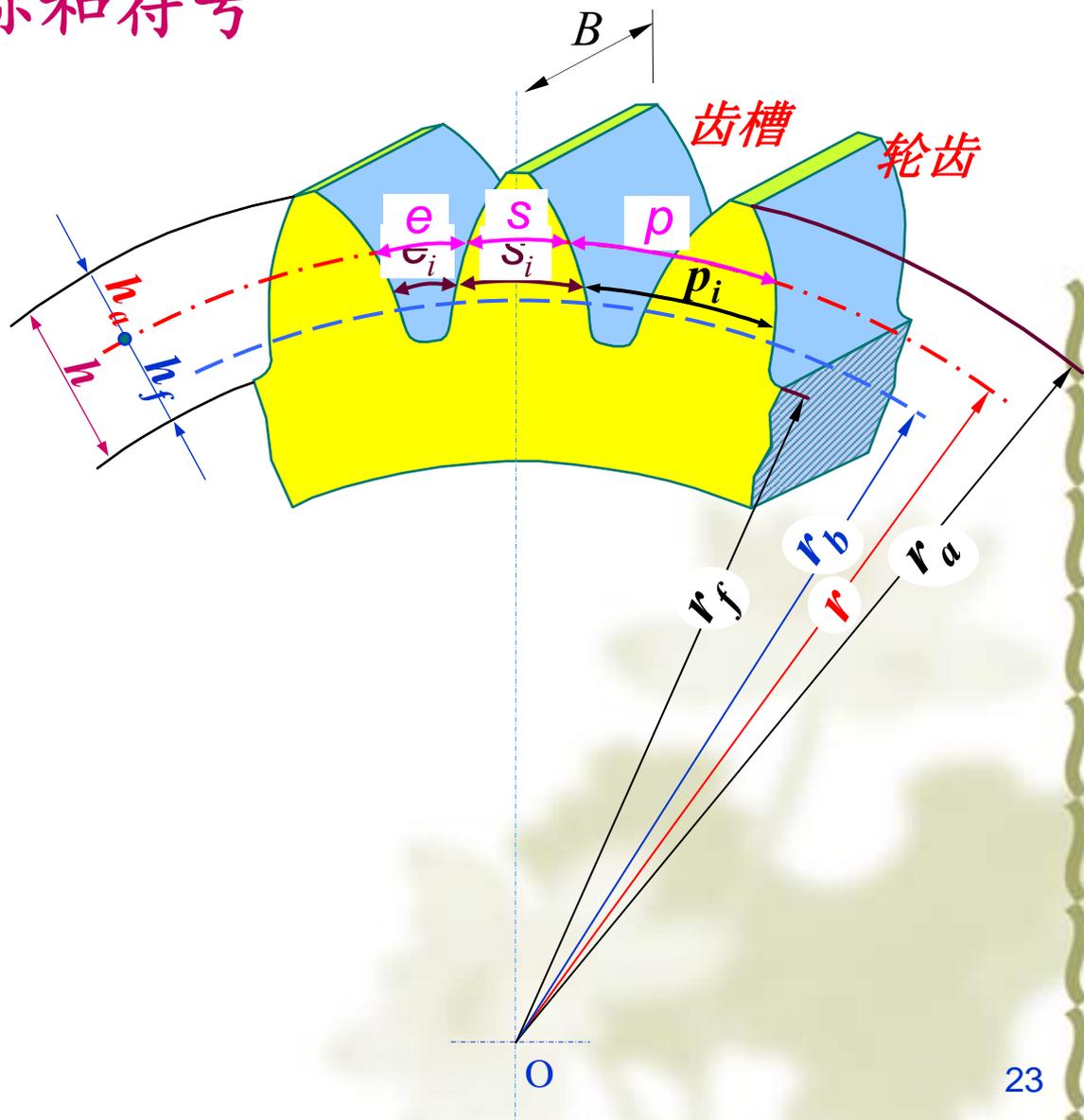
❖ 齿距  $p_i$ :  $p_i = s_i + e_i$

❖ 分度圆  $d (r)$ :  $p = s + e$

❖ 齿顶高  $h_a$

❖ 齿根高  $h_f$

❖ 齿全高  $h$ :  $h = h_a + h_f$



## 2. 渐开线齿轮的基本参数

(1) 齿数:  $z$

(2) 模数:  $m$

周长:  $\pi d = zp \rightarrow d = zp/\pi$

令  $m = p/\pi$  则

$$d = zm$$

(3) (分度圆)压力角  $\alpha$

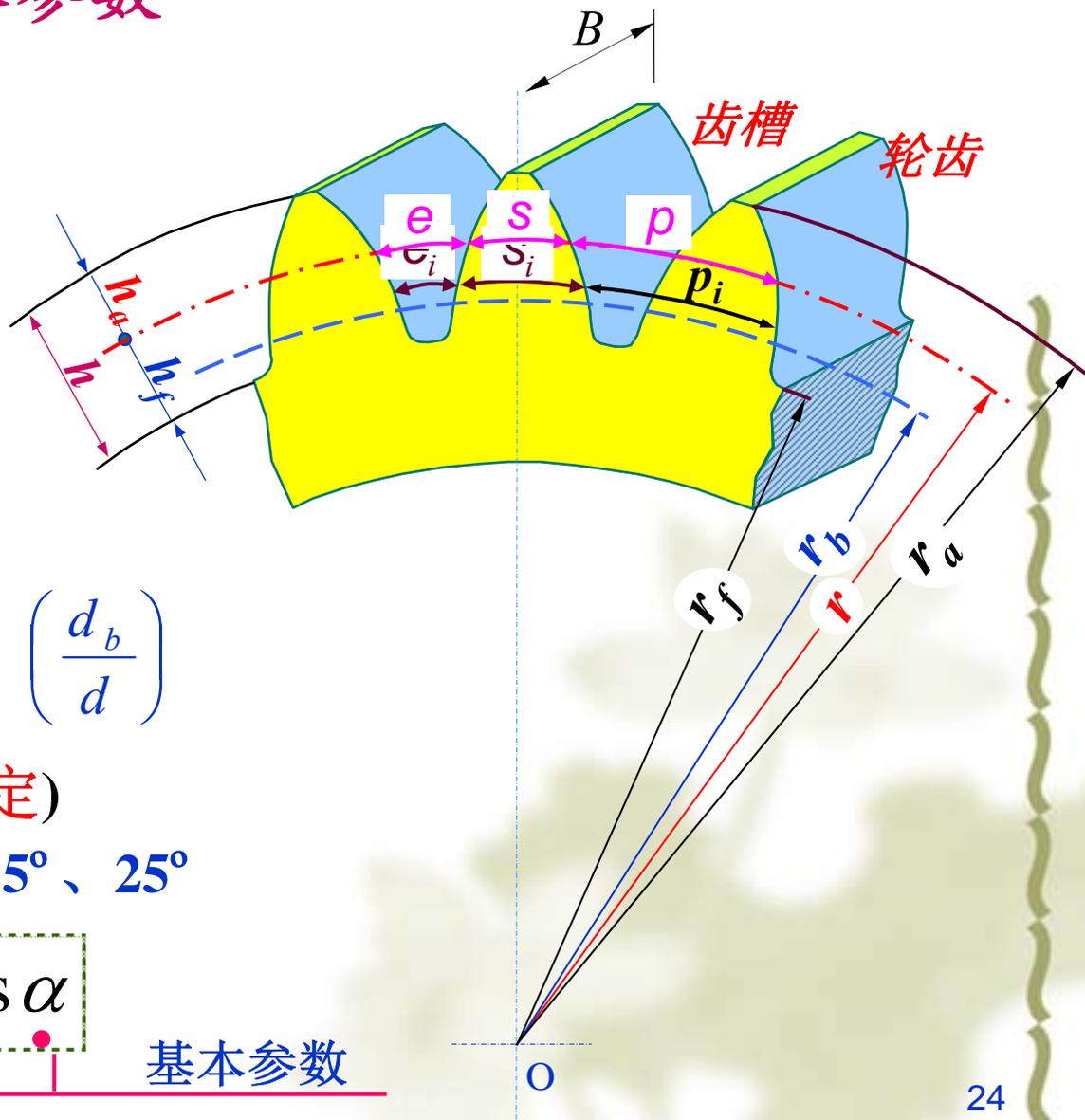
$$\alpha = \arccos \left( \frac{r_b}{r} \right) = \arccos \left( \frac{d_b}{d} \right)$$

标准压力角:  $\alpha = 20^\circ$  (规定)

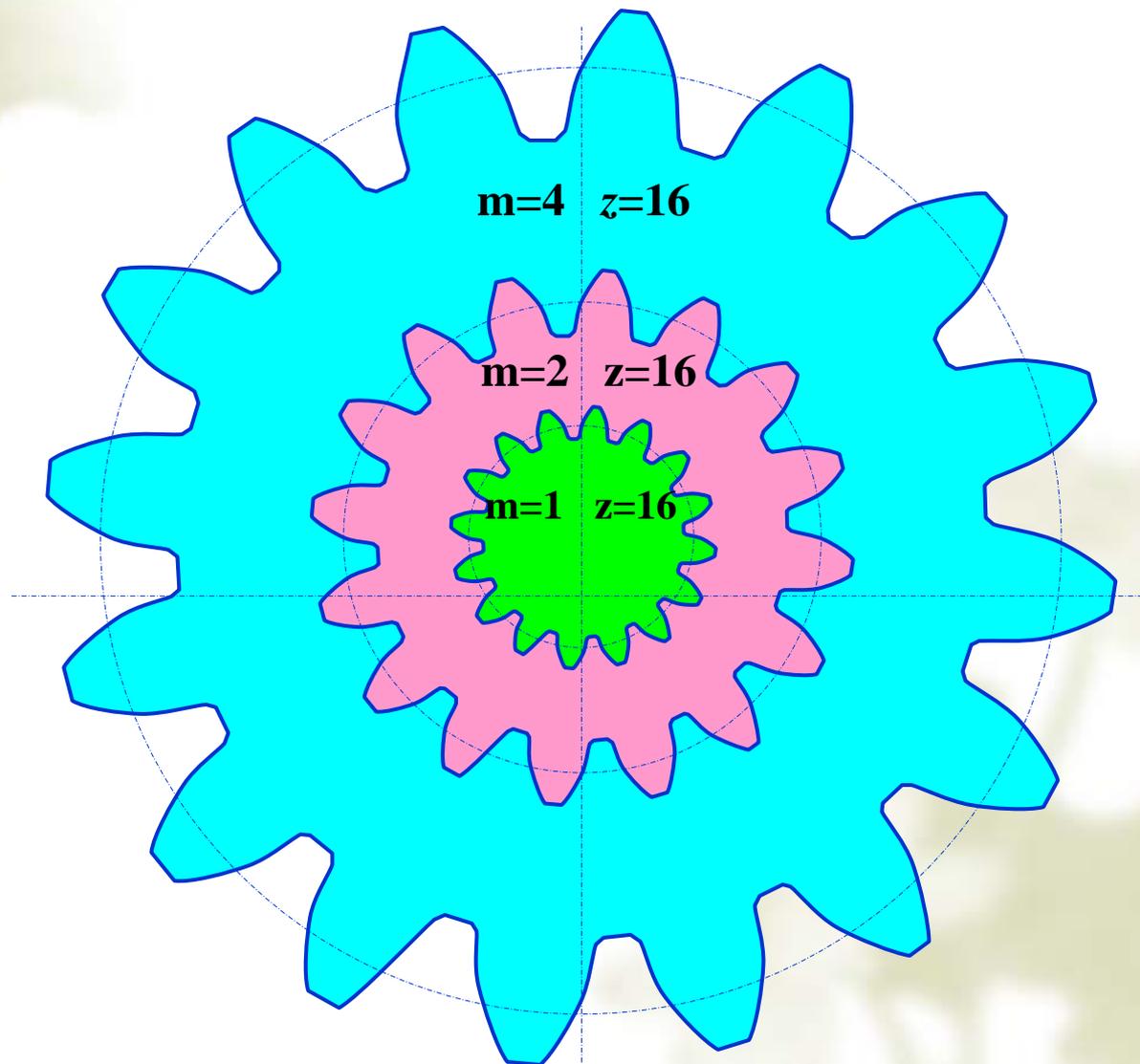
少数场合有  $14.5^\circ$ 、 $15^\circ$ 、 $22.5^\circ$ 、 $25^\circ$

$$d_b = d \cos \alpha = mz \cos \alpha$$

基本参数



# 不同模数齿轮尺寸比较

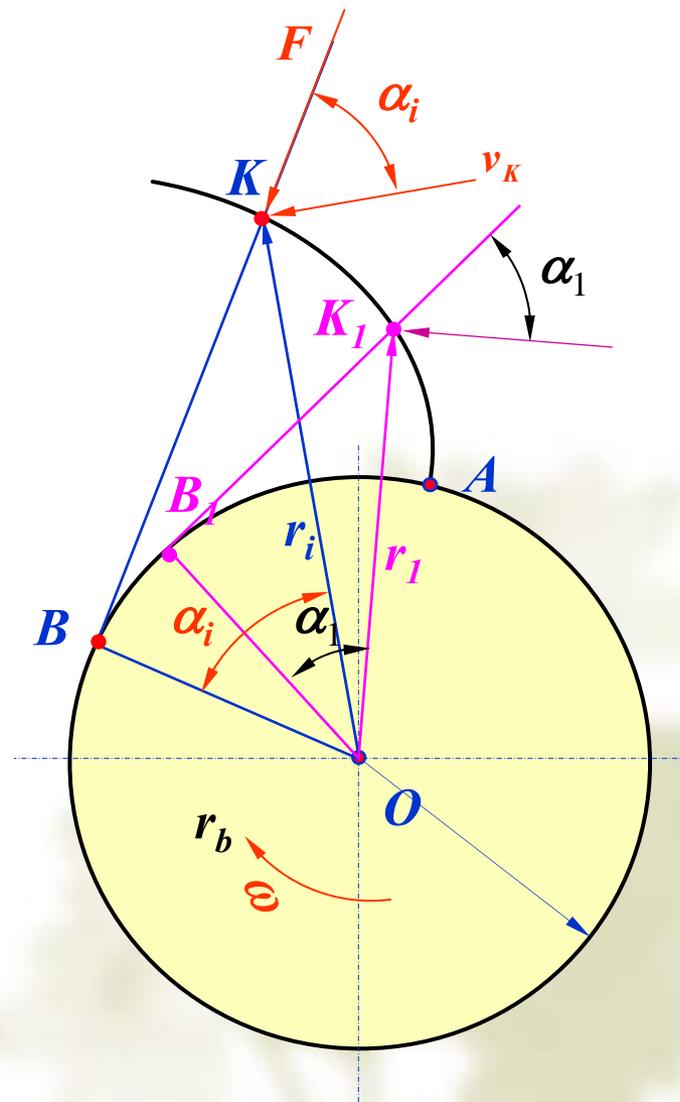


## 压力角 $\alpha$

$$\cos \alpha_i = \frac{\overline{OB}}{\overline{OK}} = \frac{r_b}{r_i}$$

- ❖ 不同半径处，压力角不同
- ❖ 分度圆上压力角为标准值
- ❖ 分度圆：

模数和压力角均为标准值的圆



## (4) 齿顶高系数 $h_a^*$ 顶隙系数 $c^*$

$$h_a = h_a^* m$$

$$h_f = (h_a^* + c^*) m$$

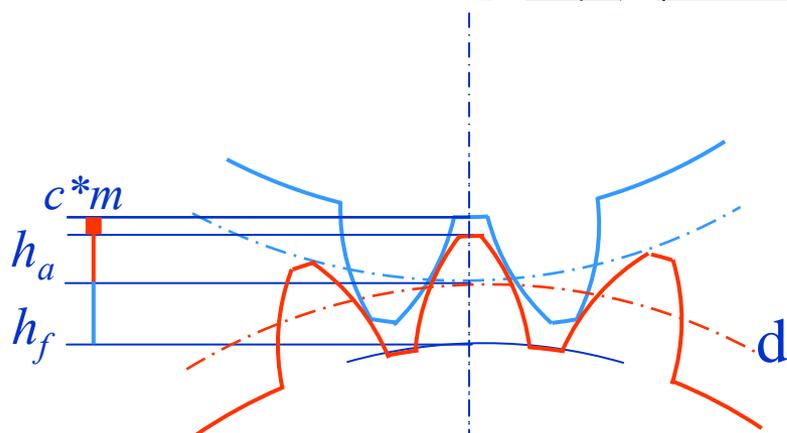
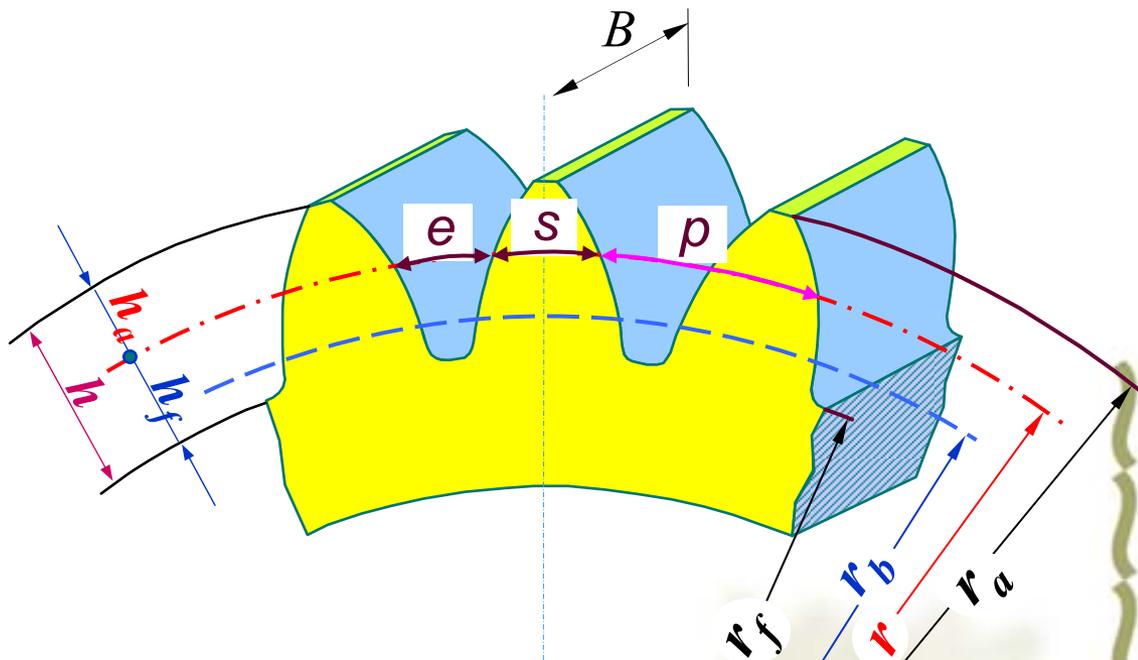
❖ 正常齿:

$$m \geq 1 : h_a^* = 1, c^* = 0.25$$

$$m < 1 : h_a^* = 1, c^* = 0.35$$

❖ 短齿:

$$h_a^* = 0.8, c^* = 0.3$$



标准齿轮

- ①  $m$ 、 $\alpha$  为标准数值
- ②  $h_a^*$ 、 $c^*$  为标准数值
- ③  $s = e = p/2$

### 3. 几何尺寸 $z, m, \alpha, h_a^*, c^*$

分度圆直径  $d$ :  $d = mz$

齿顶高  $h_a$ :  $h_a = h_a^* m$

齿根高  $h_f$ :  $h_f = (h_a^* + c^*) m$

齿全高  $h$ :  $h = h_a + h_f$

齿顶圆直径  $d_a$ :  $d_a = d + 2h_a = (z + 2h_a^*) m$

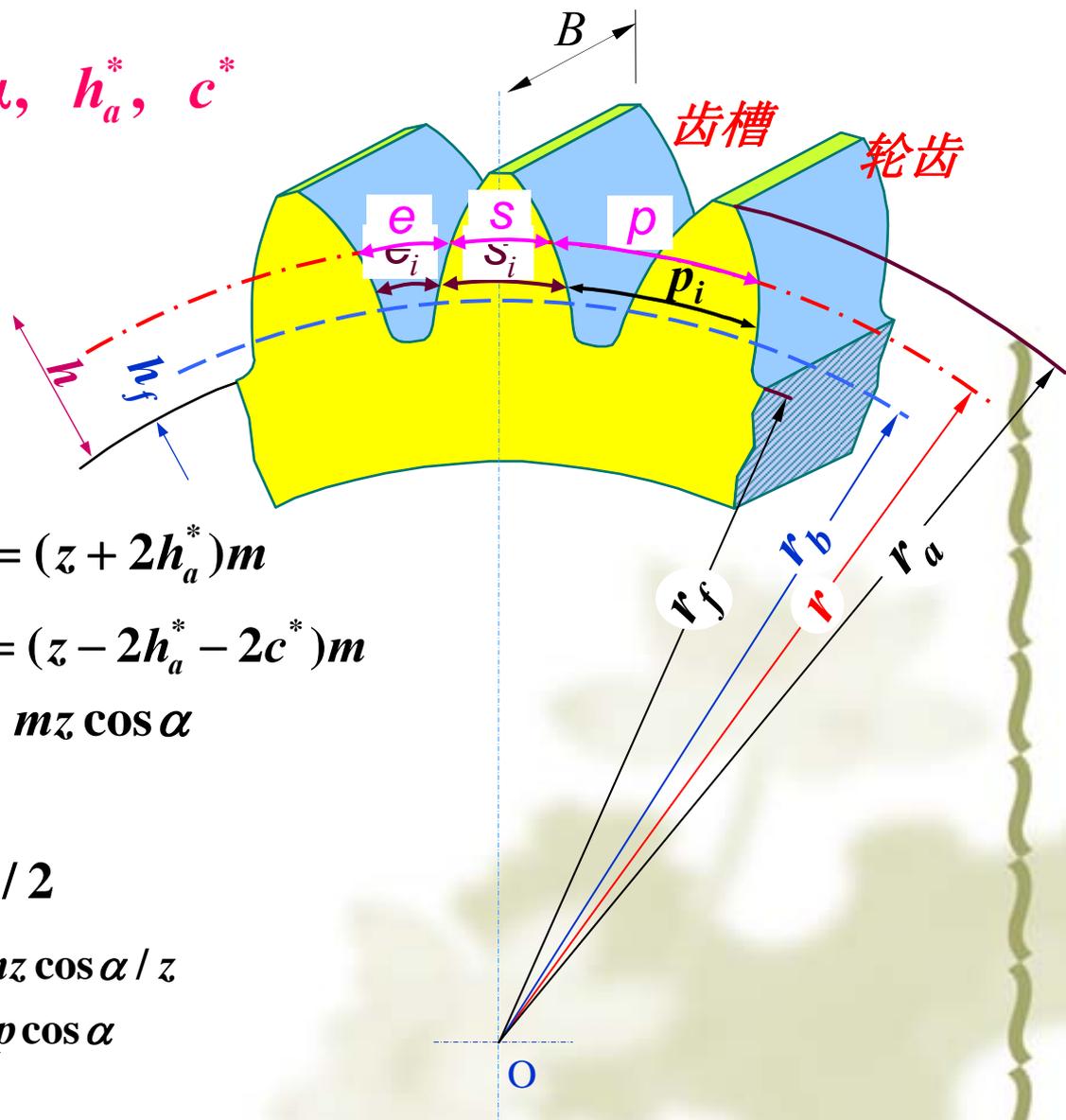
齿根圆直径  $d_f$ :  $d_f = d - 2h_f = (z - 2h_a^* - 2c^*) m$

基圆直径  $d_b$ :  $d_b = d \cos \alpha = mz \cos \alpha$

齿距  $p$ :  $p = \pi m$

齿厚  $s$  与齿槽宽  $e$ :  $s = e = \pi m / 2$

基圆齿距  $p_b$ :  $p_b = \pi d_b / z = \pi m z \cos \alpha / z$   
 $= \pi m \cos \alpha = p \cos \alpha$



## 任意半径 $r_i$ 的圆周上的齿厚 $s_i$

$$s_i = r_i \varphi$$

$$\varphi = \angle BOB - 2\angle BOC$$

$$= \frac{s}{r} - 2(\theta_i - \theta)$$

$$= \frac{s}{r} - 2(\text{inv } \alpha_i - \text{inv } \alpha)$$

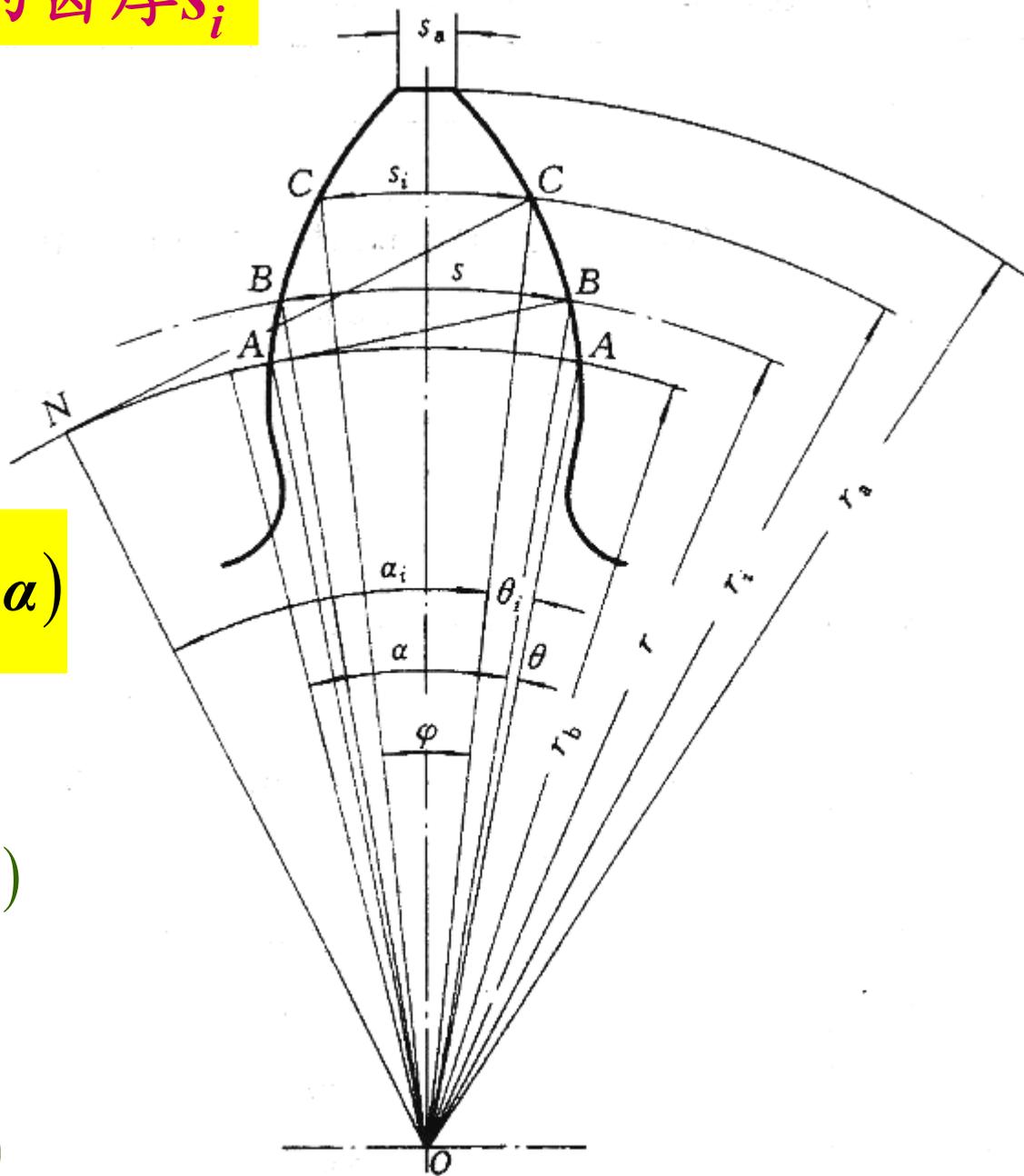
$$s_i = s \frac{r_i}{r} - 2r_i(\text{inv } \alpha_i - \text{inv } \alpha)$$

基圆齿厚 $s_b$

$$s_b = s \frac{r_b}{r} - 2r_b(\text{inv } \alpha_b - \text{inv } \alpha)$$

$$= s \cos \alpha + 2r \cos \alpha \text{inv } \alpha$$

$$= \cos \alpha (s + mz \text{inv } \alpha)$$



## 课堂练习

10-24 测量齿轮的公法线长度是检验齿轮精度的常用方法之一，试推导渐开线标准齿轮公法线长度的计算公式

$$L = m \cos \alpha [(k - 0.5)\pi + z \operatorname{inv} \alpha]$$

式中， $k$ 为跨齿数，其计算公式为： $k = z\alpha / 180^\circ + 0.5$

提示：假设卡尺的卡脚与齿廓的切点 $a$ 、 $b$ 恰好在分度圆上。



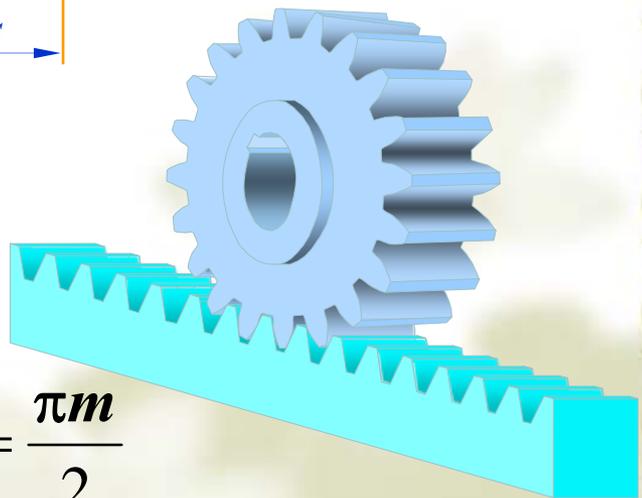
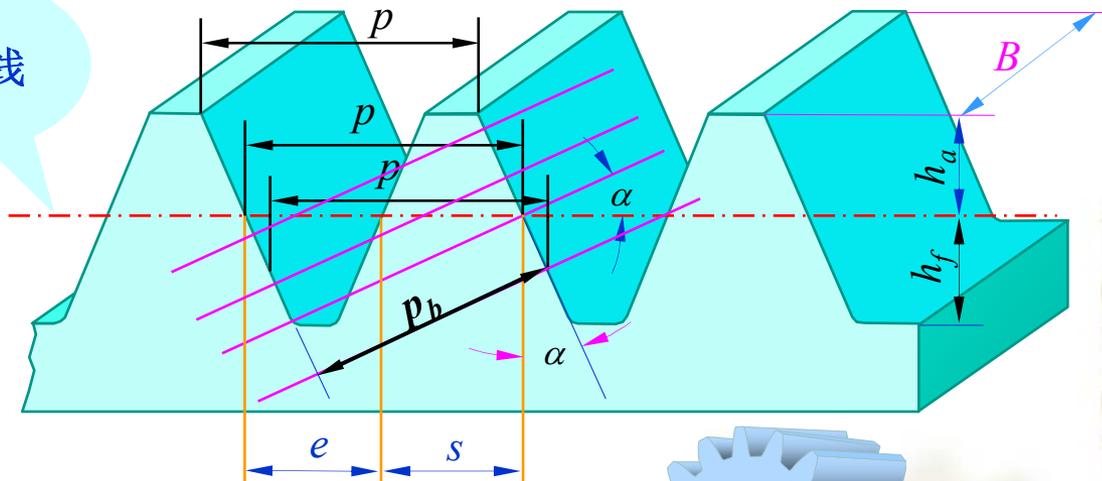
## 4. 齿条和内齿轮的尺寸

### 4.1 齿条

特点:

- ❖ 齿廓为直线，齿廓上各点法线平行，各点压力角相等，等于齿廓斜角——齿形角，标准值为 $20^\circ$
- ❖ 同侧齿廓平行，各处齿距相等， $p = \pi m$

分度线



$$s = e = \frac{\pi m}{2}$$

$$h_a = h_a^* m \quad h_f = (h_a^* + c^*) m$$

$$p_b = p \cos \alpha$$

## 4. 齿条和内齿轮的尺寸

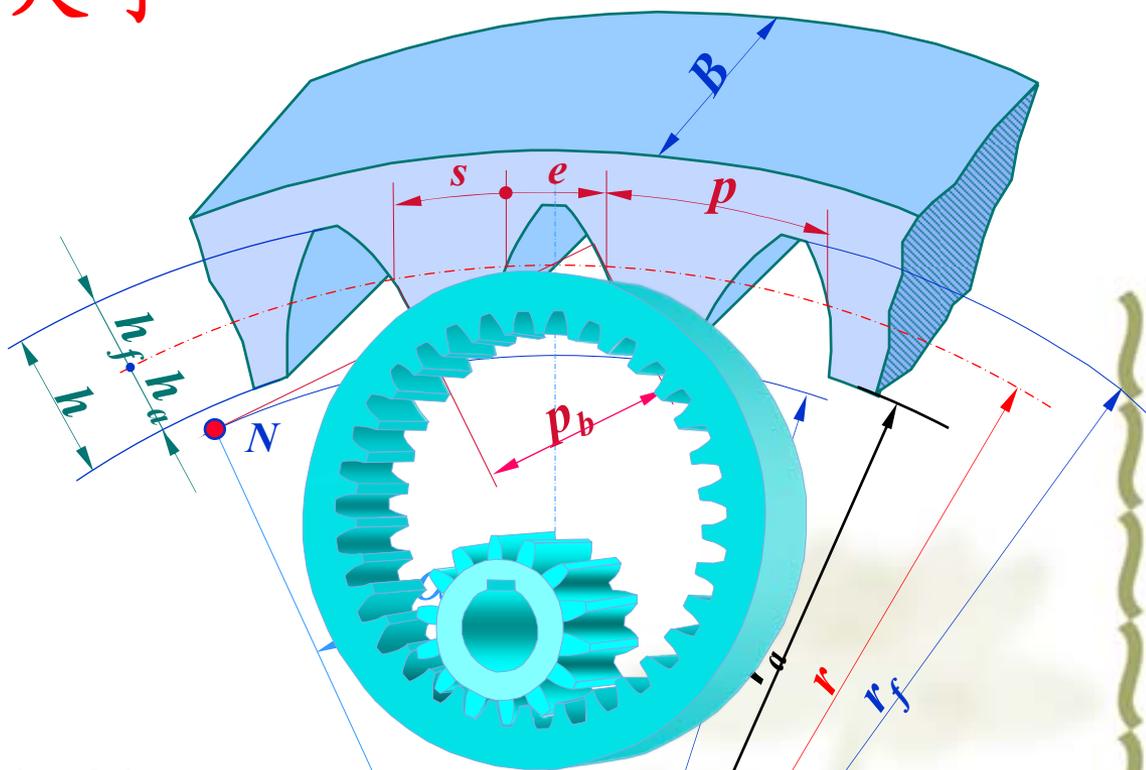
### 4.2 内齿轮

特点:

- ❖ 内齿轮的齿廓内凹，其齿厚和槽宽分别对应于外齿轮的槽宽与齿厚
- ❖ 齿顶圆小于分度圆，齿根圆大于分度圆

$$d_a = d - 2h_a \quad d_f = d + 2h_f$$

- ❖ 齿顶圆必须大于基圆，否则齿顶部分不是渐开线
- ❖ 其它尺寸同外齿轮



$$s = e = \frac{\pi m}{2}$$

$$h_a = h_a^* m$$

$$h_f = (h_a^* + c^*) m$$

$$p_b = \pi m \cos \alpha = p \cos \alpha$$

## § 10-5 渐开线直齿圆柱齿轮的啮合传动

1. 正确啮合条件
2. 中心距和啮合角
3. 连续传动条件

# 1. 正确啮合条件

- ❖ 一对渐开线齿轮在传动时，啮合点都应在啮合线 $N_1N_2$ 上
- ❖ 正确啮合，法向齿距 $p_b$ 须：

$$p_{b1} = p_{b2}$$

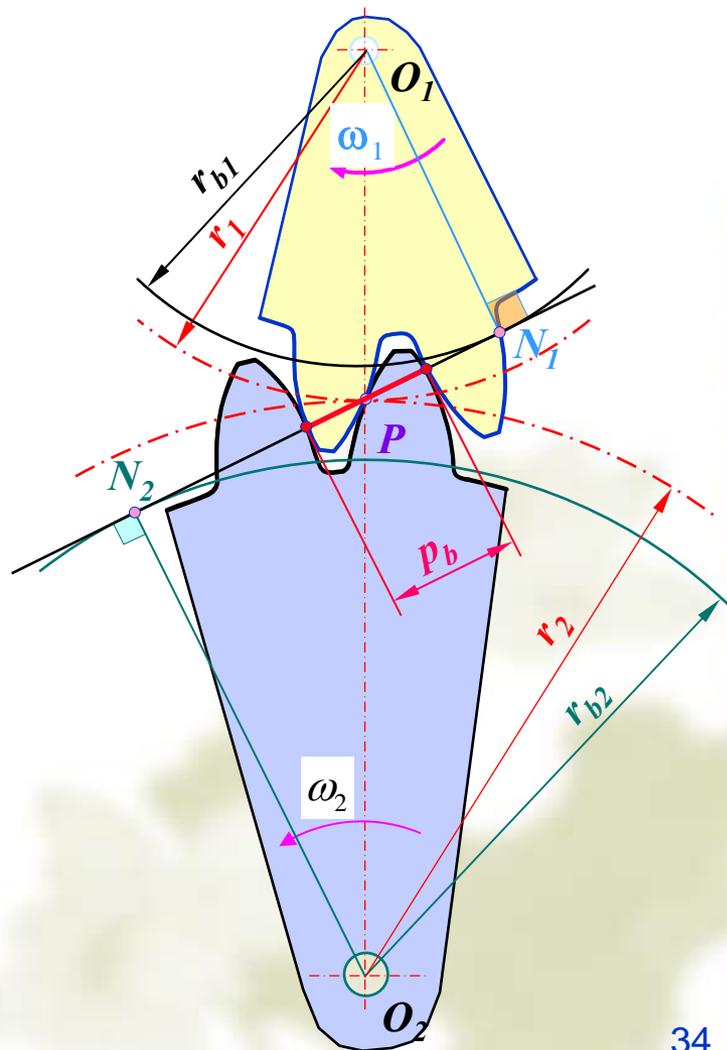
- ❖ 若 $p_{b1} \neq p_{b2}$ ，情况如何？

$$p_{b1} = p_{b2} \longrightarrow \pi m_1 \cos \alpha_1 = \pi m_2 \cos \alpha_2$$

$$\begin{cases} m_1 = m_2 = m \\ \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \end{cases}$$

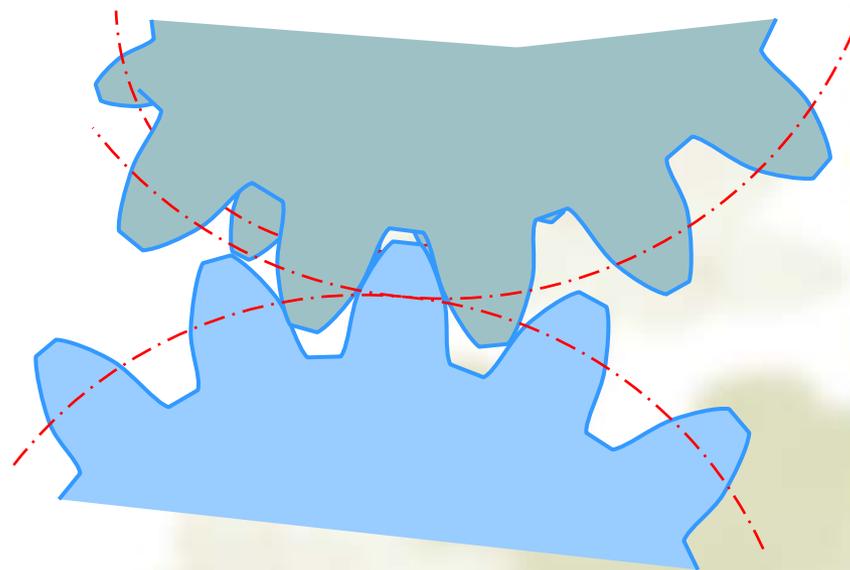
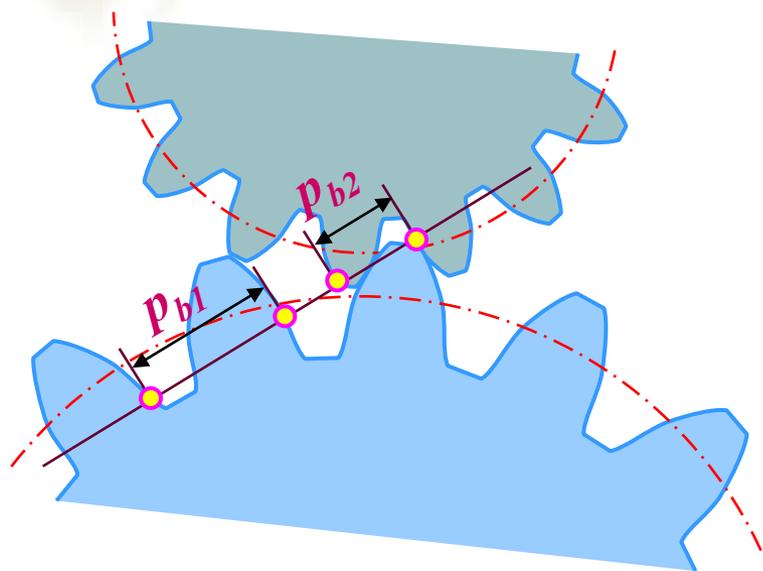
- ❖ 正确啮合条件：

两轮的模数和压力角分别相等



## 两轮法向齿距不等时

两轮法向齿距不等时（ $p_{b1} \neq p_{b2}$ ），轮齿发生干涉，  
两轮不能正确啮合传动



## 2. 中心距和啮合角

### (1) 标准安装

两个要求: (1) 侧隙为0; (2) 顶隙为标准值 ( $c=c^*m$ )

#### 标准中心距

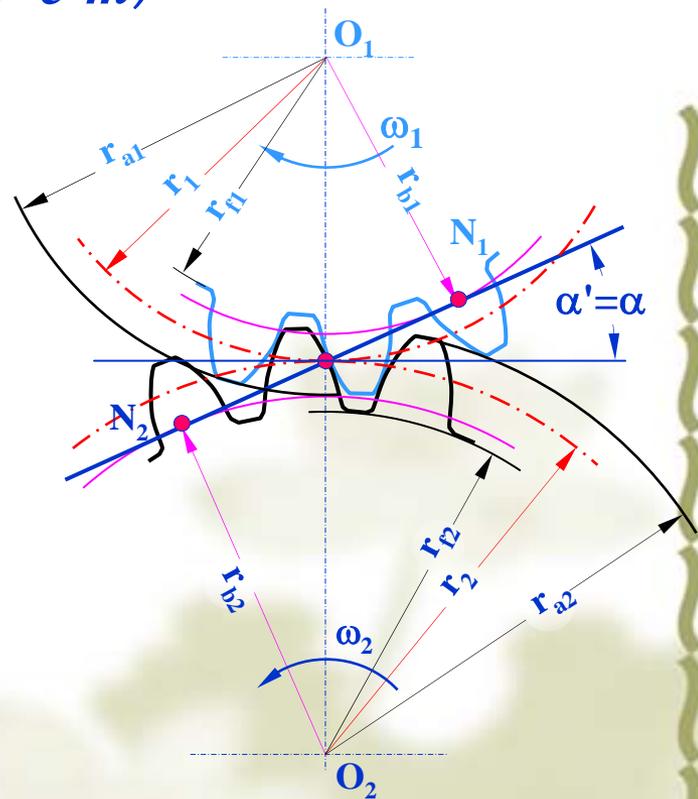
$$\begin{aligned} a &= r_{a1} + c + r_{f2} \\ &= (r_1 + h_a^* m) + c^* m + (r_2 - h_a^* m - c^* m) \\ &= r_1 + r_2 = \frac{m(z_1 + z_2)}{2} \end{aligned}$$

$$a = r_1' + r_2' \Rightarrow r_1' = r_1, \quad r_2' = r_2$$

(节圆与分度圆重合)

啮合角  $\alpha'$   $\alpha'$ :  $\angle(\vec{v}_p, N_1N_2)$  (节圆压力角)

$$\alpha' = \alpha = 20^\circ$$



## (2) 非标准安装

实际中心距 > 标准中心距

$$a' > a \Rightarrow r'_1 > r_1, \quad r'_2 > r_2$$

$$a' = r'_1 + r'_2 > r_1 + r_2$$

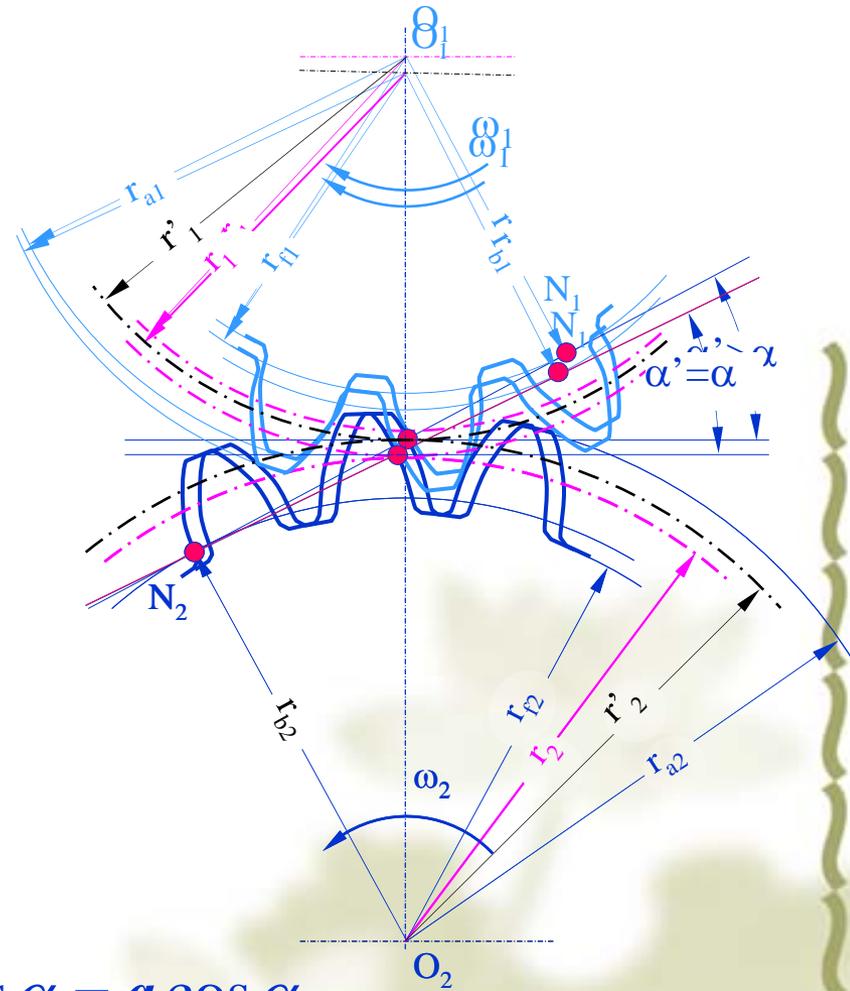
啮合角  $\alpha' > \alpha$ , 但  $\alpha' = ?$

$$\left. \begin{aligned} r_{b1} &= r'_1 \cos \alpha' \\ r_{b2} &= r'_2 \cos \alpha' \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow r_{b1} + r_{b2} = (r'_1 + r'_2) \cos \alpha' = a' \cos \alpha'$$

$$\left. \begin{aligned} r_{b1} &= r_1 \cos \alpha \\ r_{b2} &= r_2 \cos \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow r_{b1} + r_{b2} = (r_1 + r_2) \cos \alpha = a \cos \alpha$$

$$a' \cos \alpha' = a \cos \alpha$$



## 课堂练习题

某齿轮机构,大齿轮已丢失,仅留小齿轮,测得 $z_1=38, d_{a1}=100, a_0=126$ ,  
试求:(1)丢失的大齿轮的主要参数;(2)当 $a'=126$ 时, 求  $a'$ 、 $r'_1$ 、  
 $r'_2$ 、及齿廓在节点处的曲率半径  $\rho'_1$ 、 $\rho'_2$

解:(1)  $d_{a1}=d_1+2h_a = m(z_1+2h_a^*)$

$$m = \frac{d_{a1}}{(z_1+2h_a^*)} \quad \text{试取 } h_a^*=1, \quad \text{则 } m = \frac{100}{38+2 \times 1} = 2.5$$

$m = 2.5$  为标准值

$$a = \frac{m(z_1+z_2)}{2} \Rightarrow z_2 = \frac{2a}{m} - z_1$$

$$\text{暂取 } a \approx a_0 = 126, \quad \text{则 } z_2 = \frac{2 \times 126}{2.5} - 38 = 62.4$$

$z_2 = 62.4$  不是整数,可见 $a = 126$ 不是标准中心距  
因标准中心距为最小中心距,可确定 $z_2 = 62$

$$d_2 = mz_2 = 2.5 \times 62 = 155$$

$$d_{a2} = d_2 + 2h_a^* m = 155 + 2 \times 1 \times 2.5 = 160$$

$$d_{f2} = d_2 - 2(h_a^* + c^*)m = 155 - 2 \times (1 + 0.25) \times 2.5 = 148.75$$

$$d_{b2} = d_2 \cos \alpha = 155 \cos 20^\circ = 145.65$$

$$p = \pi m = 2.5\pi = 7.854$$

$$a = \frac{1}{2} m(z_1 + z_2) = \frac{1}{2} \times 2.5 \times (38 + 62) = 125$$

$$(2) \alpha' \cos \alpha' = a \cos \alpha$$

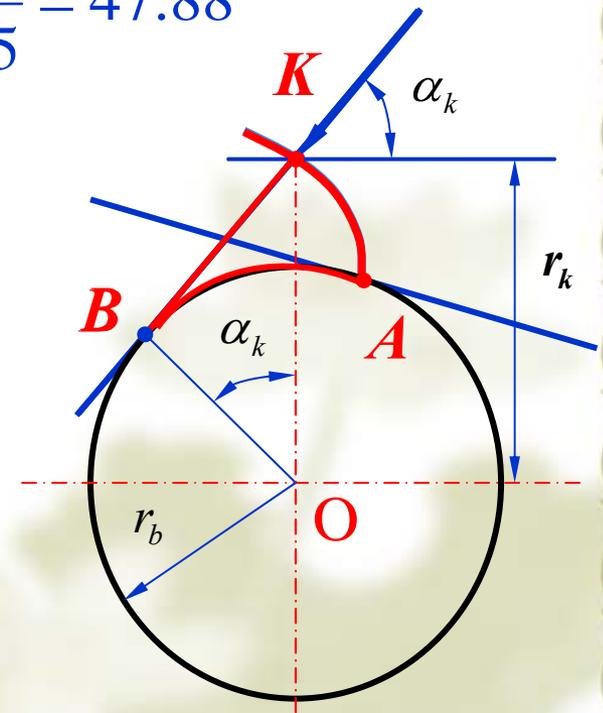
$$\alpha' = \cos^{-1} \left( \frac{a \cos \alpha}{a'} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{125 \cos 20^\circ}{126} \right) = 21.21411^\circ$$

$$r_1' = \frac{r_{b1}}{\cos \alpha'} = \frac{r_1 \cos \alpha}{\cos \alpha'} = r_1 \frac{a'}{a} = \frac{2.5 \times 38}{2} \times \frac{126}{125} = 47.88$$

$$r_2' = a' - r_1' = 126 - 47.88 = 78.12$$

$$\rho_1' = r_1' \sin \alpha' = 47.88 \sin 21.21411^\circ = 17.33$$

$$\rho_2' = r_2' \sin \alpha' = 78.12 \sin 21.21411^\circ = 28.27$$



$$\rho_k = r_k \sin \alpha_k \quad 40$$

## 课堂练习

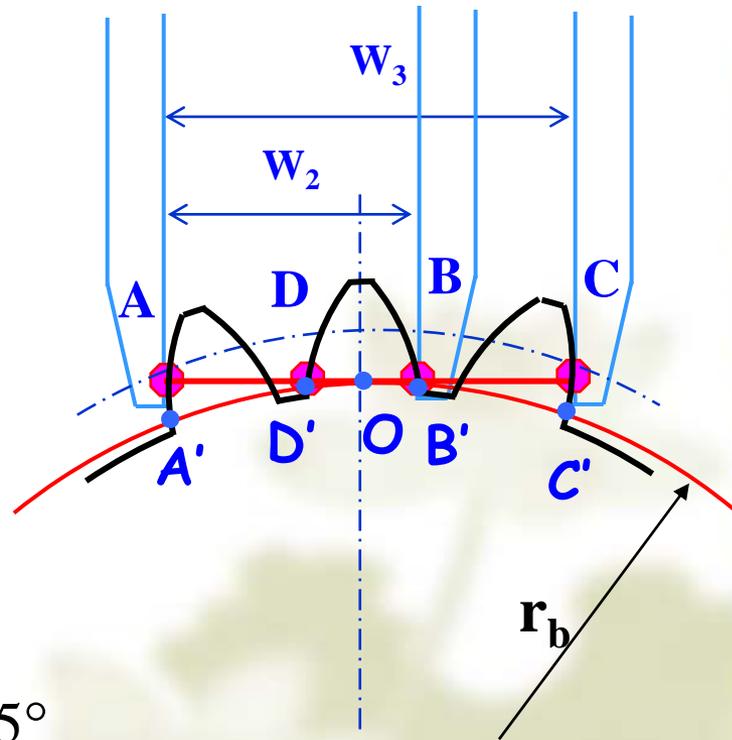
已知：法向距离(即公法线长度)分别为： $W_3 = 61.84\text{mm}$ ，  
 $W_2 = 37.56\text{mm}$ ， $m=8\text{mm}$ ， $z = 24$ ； $h_a^*=1$ ； $c^*=0.25$

求： $\alpha$

解：
$$p_b = \overline{BC} = W_3 - W_2$$
$$= 61.84 - 37.56 = 24.28$$

$$d_b = \frac{z p_b}{\pi} = \frac{24 \times 24.28}{\pi} = 185.49$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{d_b}{d}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{185.486}{8 \times 24}\right) = 15^\circ$$



# 齿轮与齿条啮合传动

啮合线 $N_1N_2(N_2 \rightarrow \infty)$   $P$ 点:节点

## 标准安装

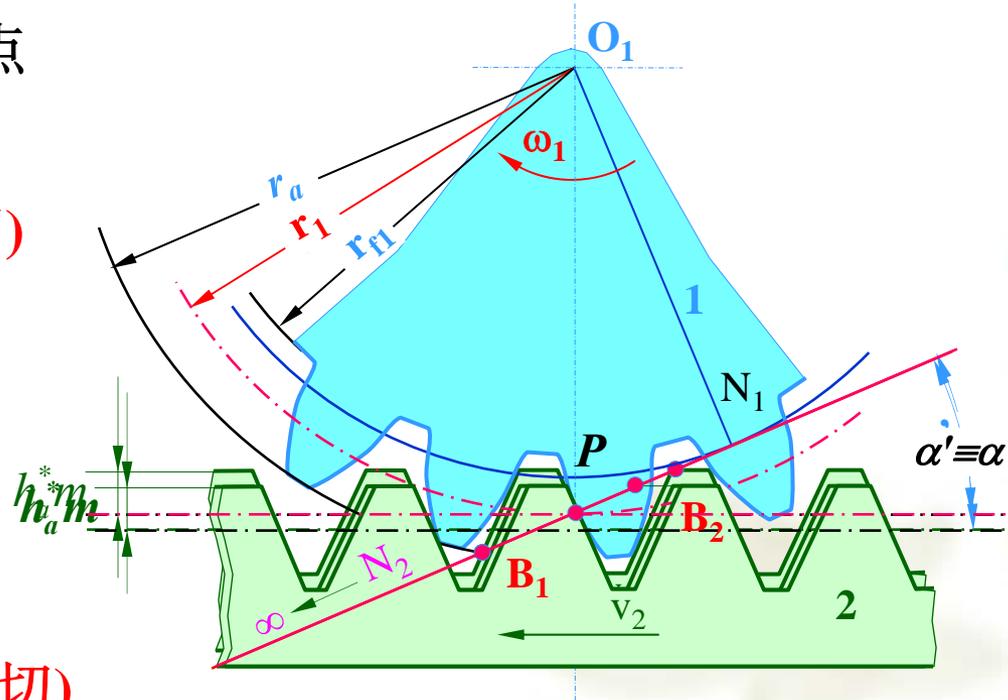
(齿轮分度圆与齿条分度线相切)

- ❖ 齿轮分度圆与节圆重合
- ❖ 齿条分度线与节线重合
- ❖  $\alpha' = \alpha =$  齿条齿形角

## 非标准安装

(齿轮分度圆不与齿条分度线相切)

- ❖ 齿轮分度圆与节圆重合
- ❖ 齿条分度线与节线不重合
- ❖  $\alpha' = \alpha$



## 特点:

- (1)  $N_1N_2$ 不变,  $P$ 点不变, 齿轮节圆大小不变, 恒与分度圆重合;
- (2) 啮合角永远等于齿轮的分度圆压力角, 即  $\alpha' = \alpha$

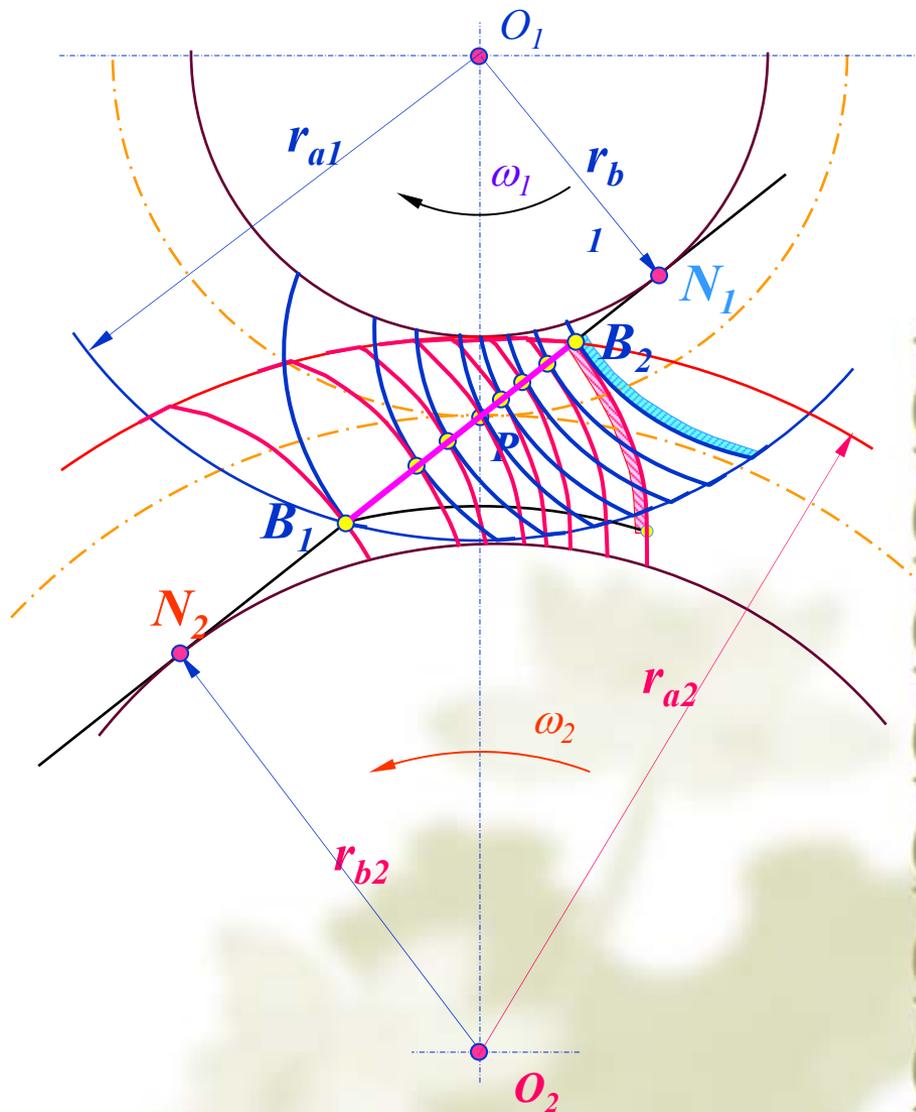
### 3. 连续传动条件

#### (1) 一对轮齿的啮合过程

主动轮：齿根→齿顶

从动轮：齿顶→齿根

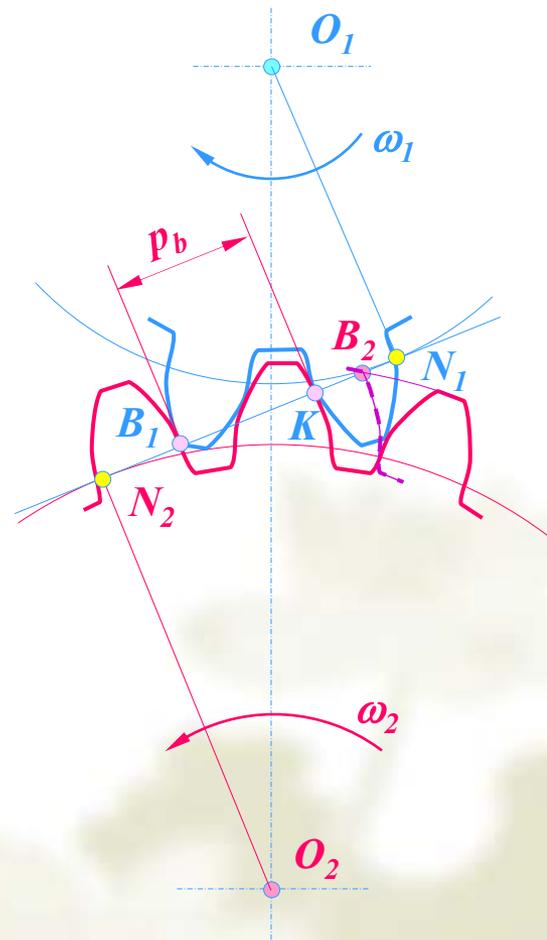
- ❖ 啮合线 $N_1N_2$ (啮合点的轨迹)
- ❖ 啮合起始点： $B_2$
- ❖ 啮合终止点： $B_1$
- ❖ 实际啮合线段： $B_2B_1$
- ❖ 齿顶圆加大, $B_2$ 、 $B_1$ 就趋近于 $N_1$ 、 $N_2$
- ❖ 理论啮合线段： $N_1N_2$
- ❖ 齿廓实际工作段



## (2) 连续传动条件

- ❖ 连续传动：必须保证在前一对轮齿尚未脱离啮合时，后一对轮齿就要及时进入啮合。
- ❖ **条件？**  $\overline{B_1B_2} \geq p_b$

重合度  $\varepsilon_\alpha = \overline{B_1B_2} / p_b \geq 1 \Rightarrow \varepsilon_\alpha = \overline{B_1B_2} / p_b \geq [\varepsilon_\alpha]$



重合度  $\varepsilon_\alpha = \overline{B_1B_2} / p_b \geq 1 \Rightarrow \varepsilon_\alpha = \overline{B_1B_2} / p_b \geq [\varepsilon_\alpha]$

### (3) 重合度的计算

$$\overline{B_1B_2} = \overline{B_1P} + \overline{B_2P}$$

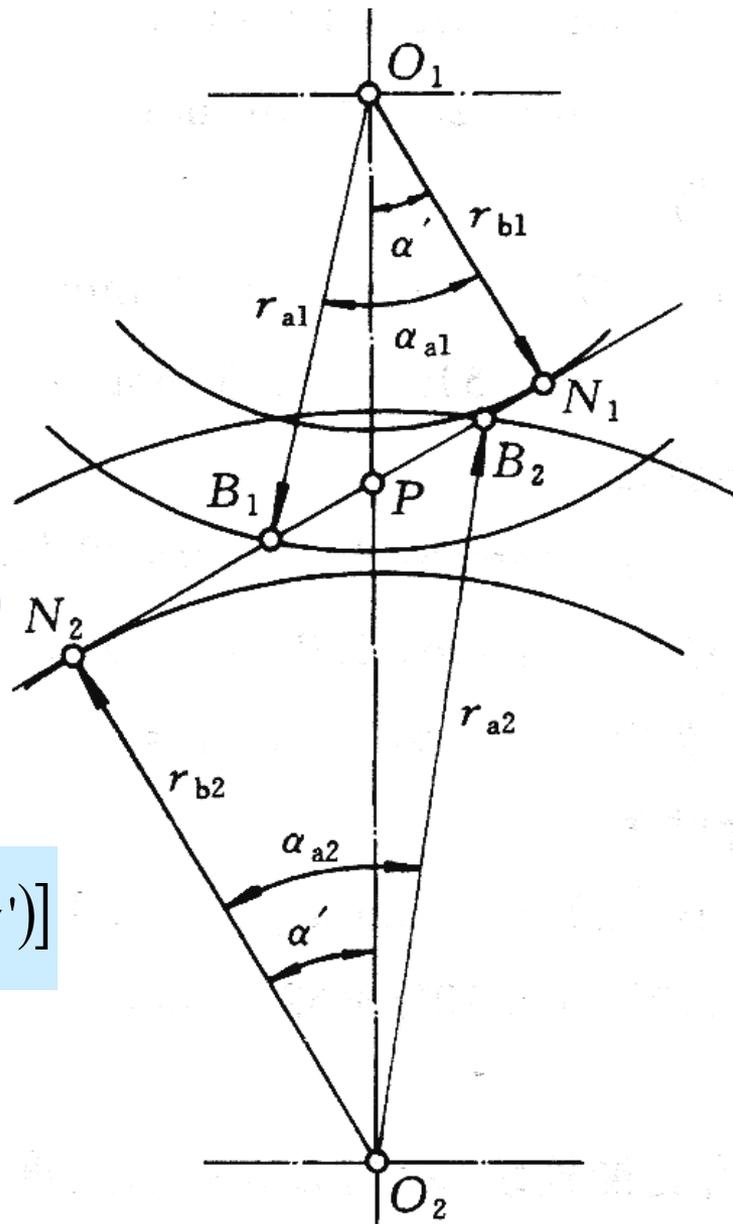
$$\overline{B_1P} = \overline{B_1N_1} - \overline{PN_1} = r_{b1}(\tan \alpha_{a1} - \tan \alpha')$$

$$\overline{B_2P} = \overline{B_2N_2} - \overline{PN_2} = r_{b2}(\tan \alpha_{a2} - \tan \alpha')$$

$$\overline{B_1B_2} = r_{b1}(\tan \alpha_{a1} - \tan \alpha') + r_{b2}(\tan \alpha_{a2} - \tan \alpha')$$

$$\because zp_b = 2\pi r_b, \quad \therefore \frac{r_b}{p_b} = \frac{z}{2\pi}$$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{2\pi} [z_1(\tan \alpha_{a1} - \tan \alpha') + z_2(\tan \alpha_{a2} - \tan \alpha')]$$



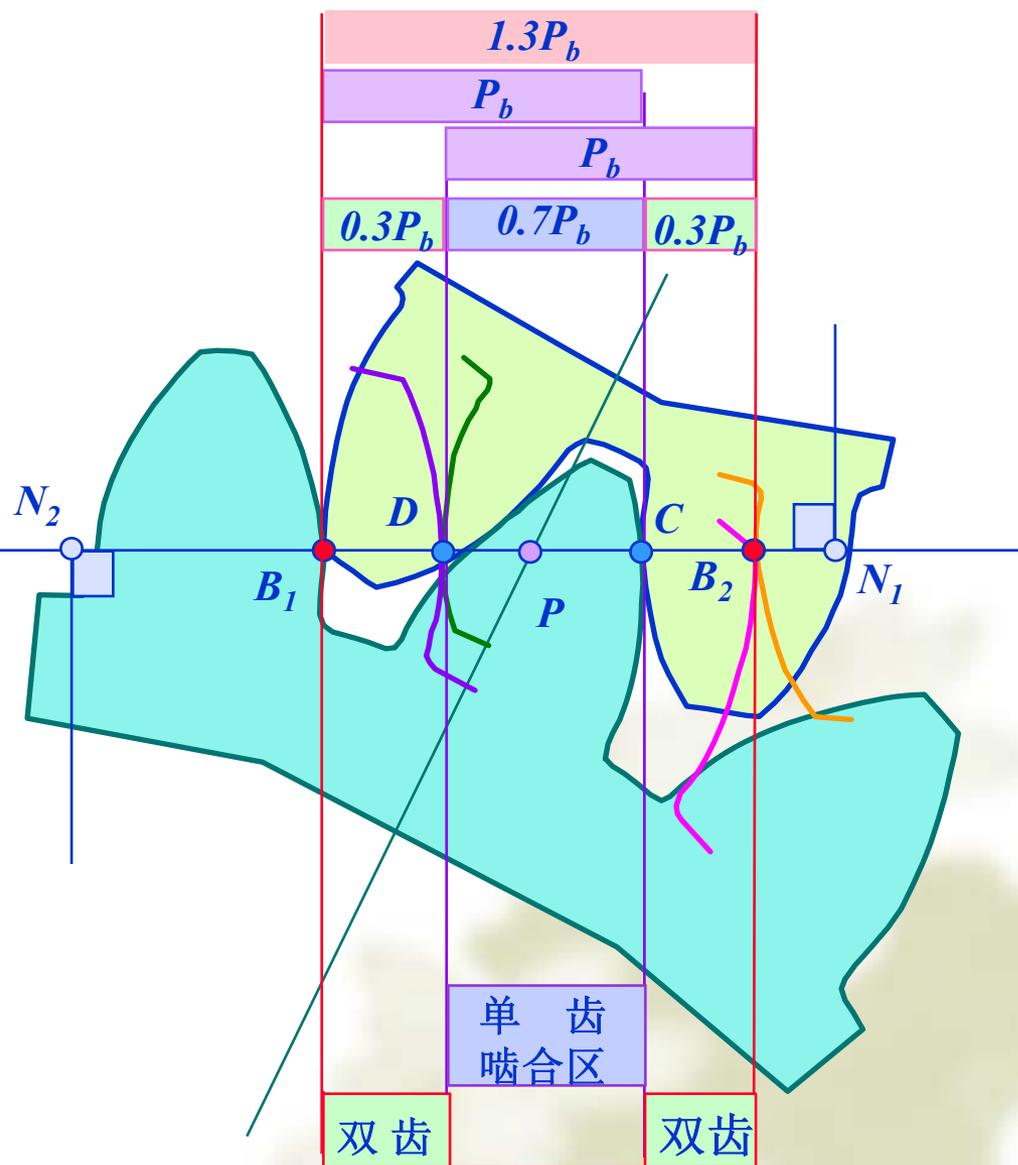
- 说明: ①  $\varepsilon_\alpha$  与  $m$  无关  
 ②  $z \uparrow \quad \varepsilon_\alpha \uparrow$   
 ③ 标准安装  $\alpha' = \alpha$

### (3) 重合度的物理意义

- ❖ 表明同时参与啮合的轮齿对数的平均值

例:  $\varepsilon_\alpha = 1.3$  表示有时一对齿啮合, 有时两对齿啮合, 总体看平均1.3对齿啮合; 其中30%的时间有两对齿啮合, 70%的时间有一对齿啮合

- ❖ 重合度关系到运动连续性、传动平稳性、承载能力



## 重合度的极限值

按标准中心距安装的标准齿轮传动

$$z_1, z_2 \rightarrow \infty, B_2 \rightarrow N_1, B_1 \rightarrow N_2$$

$$\varepsilon_\alpha \rightarrow \varepsilon_{\alpha max}$$

$$\overline{PB_1} = \overline{PB_2} = \frac{h_a^* m}{\sin \alpha}$$

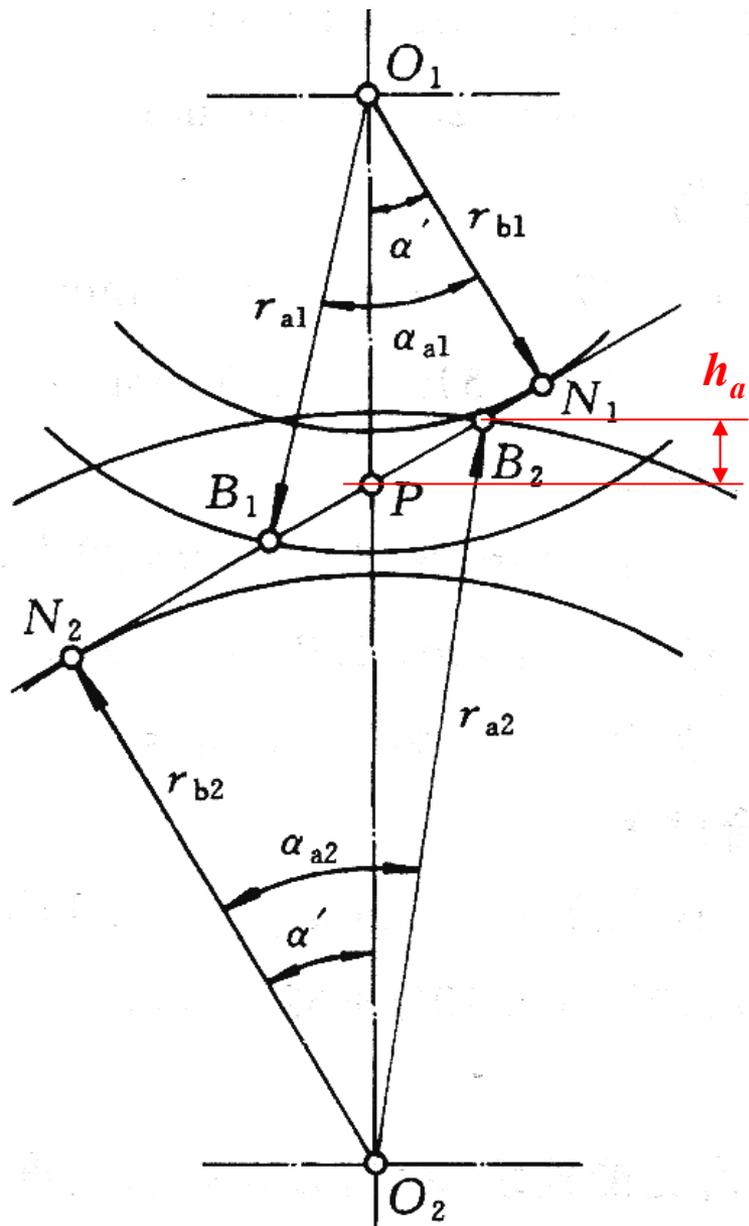
$$\varepsilon_\alpha = \frac{\overline{B_1 B_2}}{p_b} = \frac{2h_a^* m}{\pi m \cos \alpha \sin \alpha} = \frac{4h_a^*}{\pi \sin 2\alpha}$$

①  $\alpha=20^\circ$ ,  $h_a^*=1$  时,

$$\varepsilon_{\alpha max} = 1.981$$

②  $\alpha=15^\circ$ ,  $h_a^*=1$  时,

$$\varepsilon_{\alpha max} = 2.546$$



**例10-1** 有一对外啮合渐开线标准直齿圆柱齿轮,已知

$$z_1 = 19, z_2 = 52, \alpha = 20^\circ, m = 5, h_a^* = 1$$

试求: 1)按标准中心距安装时, 这对齿轮传动的重合度  $\varepsilon_\alpha$ ;

2)保证这对齿轮能连续传动, 其容许的最大中心距误差?

**解:** 1)按标准中心距安装时, 这对齿轮传动的重合度  $\varepsilon_\alpha$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{2\pi} [z_1 (\tan \alpha_{a1} - \tan \alpha') + z_2 (\tan \alpha_{a2} - \tan \alpha')]$$

$$\cos \alpha_i = \frac{r_b}{r_i}$$

$$\alpha_{a1} = \cos^{-1} \left( \frac{r_{b1}}{r_{a1}} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{r_1 \cos \alpha}{r_1 + h_a} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{mz_1 \cos \alpha / 2}{mz_1 / 2 + h_a^* m} \right)$$

$$= \cos^{-1} \left( \frac{z_1 \cos \alpha}{z_1 + 2h_a^*} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{19 \cos 20^\circ}{19 + 2 \times 1} \right) = 31.7668^\circ = 31^\circ 46' 00''$$

$$\alpha_{a2} = \cos^{-1} \left( \frac{r_{b2}}{r_{a2}} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{z_2 \cos \alpha}{z_2 + 2h_a^*} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{52 \cos 20^\circ}{52 + 2 \times 1} \right) = 25.1916^\circ = 25^\circ 11' 30''$$

解： 1)按标准中心距安装时，这对齿轮传动的重合度  $\varepsilon_\alpha$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{2\pi} \left[ z_1 (\tan \alpha_{a1} - \tan \alpha') + z_2 (\tan \alpha_{a2} - \tan \alpha') \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ 19 \times (\tan 31.7668^\circ - \tan 20^\circ) + 52 \times (\tan 25.1916^\circ - \tan 20^\circ) \right] = 1.65$$

2)保证这对齿轮能连续传动，其容许的最大中心距误差？

$$\text{要求 } \varepsilon_\alpha = \frac{1}{2\pi} \left[ z_1 (\tan \alpha_{a1} - \tan \alpha') + z_2 (\tan \alpha_{a2} - \tan \alpha') \right] \geq 1$$

$$\alpha' \leq \tan^{-1} \left( \frac{z_1 \tan \alpha_{a1} + z_2 \tan \alpha_{a2} - 2\pi}{z_1 + z_2} \right)$$

$$= \tan^{-1} \left( \frac{19 \tan 31.7668^\circ + 52 \tan 25.1916^\circ - 2\pi}{19 + 52} \right) = 22.8659^\circ$$

$$a' \cos \alpha' = a \cos \alpha \Rightarrow a' = a \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} = \frac{m(z_1 + z_2)}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'}$$

$$= \frac{5 \times (19 + 52)}{2} \cdot \frac{\cos 20^\circ}{\cos 22.8659^\circ} = 177.5 \cdot \frac{\cos 20^\circ}{\cos 22.8659^\circ} = 181.02$$

$$\Delta a = a' - a = 181.02 - 177.5 = 3.52 \text{ (mm)}$$

## § 10-7 渐开线齿轮的加工

### 1. 齿廓切制基本原理

齿轮加工方法很多，如切制法、铸造法、热轧法、冲压法、电加工法等

❖ 切制法从加工原理的角度看，可归为两大类：

❖ 仿形法(成型法)

    ❧ 铣削法实际加工

    ❧ 拉削法实际加工

❖ 范成法

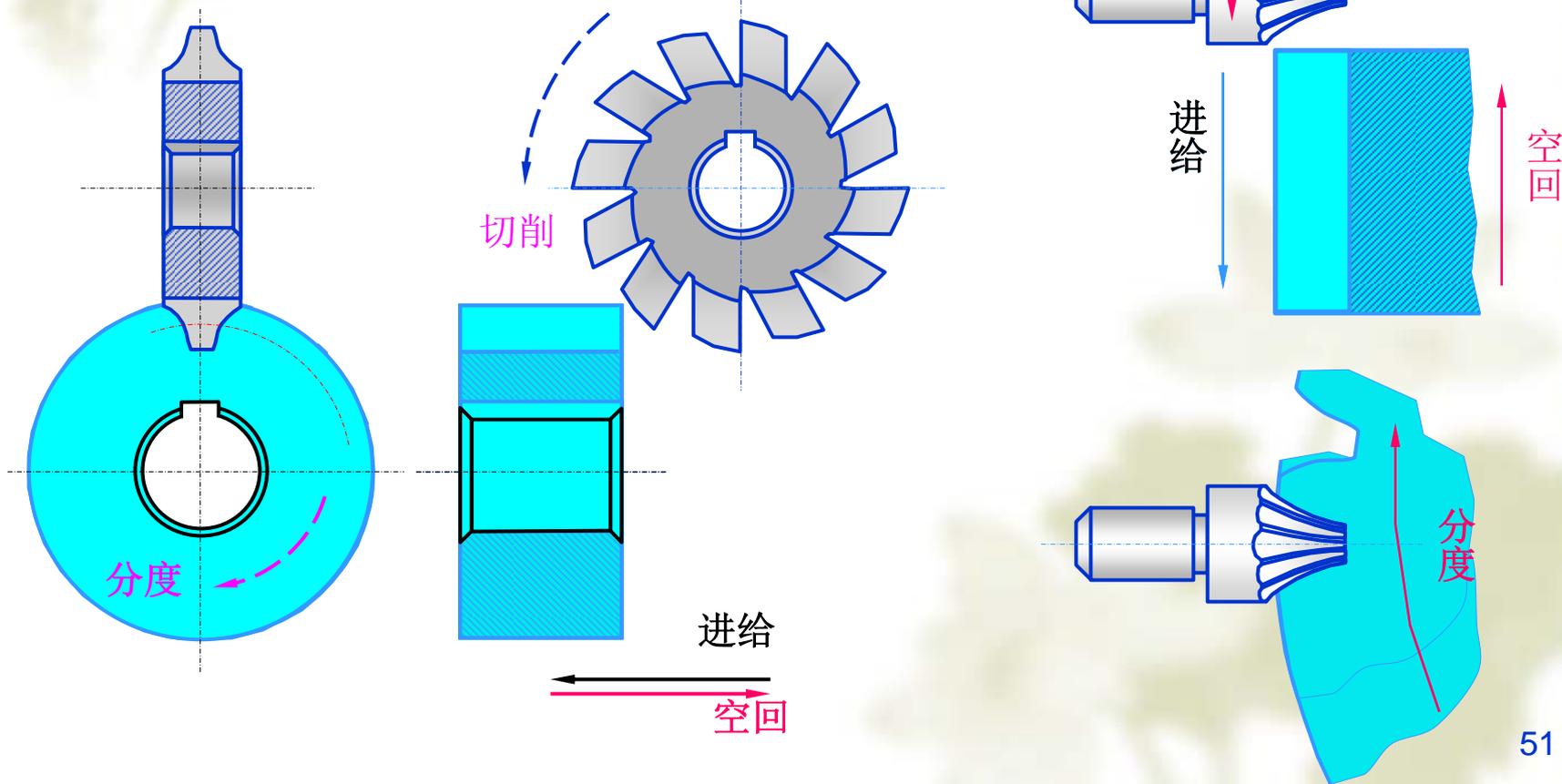
    ❧ 插齿法实际加工

    ❧ 滚齿法实际加工

# (1) 仿形法

- ❖ 盘铣刀
- ❖ 立铣刀

- ❖ 仿形铣刀(盘/立): 刀齿与齿轮齿槽同  
旋转+直移
- ❖ 齿轮毛坯: 间歇旋转



## 仿形法加工特点

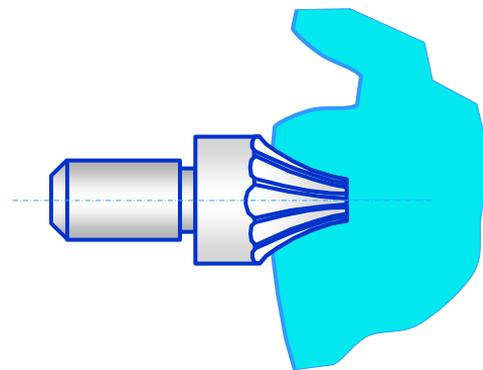
- ❖ 刀齿形状与齿轮齿槽形状相同
- ❖ 优点: 普通铣床加工

问题:

- ❖ 精度低、分度误差
- ❖ 刀具齿形误差

$d_b = d \cos \alpha = m z \cos \alpha$  决定齿形  
( $z$ 的函数), 刀具量大

工程处理: 同 $m$ 和 $\alpha$ 的刀具只有8把



- ❖ 生产率低, 有空回行程
- ❖ 分度, 夹紧等辅助工作  
时间长

应用: 修配和小批量生产

8把一组各号铣刀切制齿轮齿数范围

刀号	1	2	3	4	5	6	7	8
齿数	12~13	14~16	17~20	21~25	26~34	35~54	55~134	≥135

(每一号铣刀的形状按照所加工的一组齿轮的最少齿数的齿轮的齿型制成)

## (2) 范成法 (展成法、包络法)加工齿轮原理

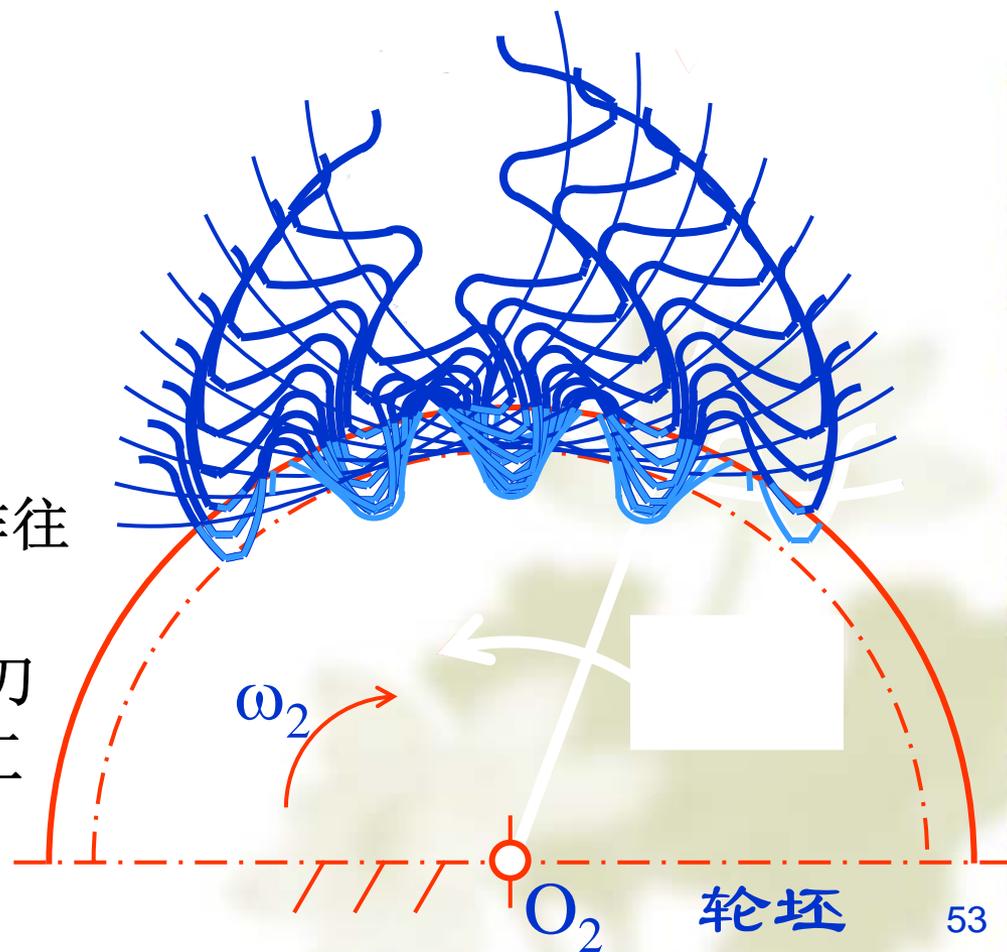
- ❖ **刀具:** 齿轮(条)插刀, 滚刀---往复直线移动+啮合式旋转/往复直线移动
- ❖ **齿轮毛坯:** 啮合式旋转

### 1) 范成运动

- ❖ 两轮分度圆相切
- ❖ 以  $i_{12} = \omega_1/\omega_2 = z_2/z_1$  传动

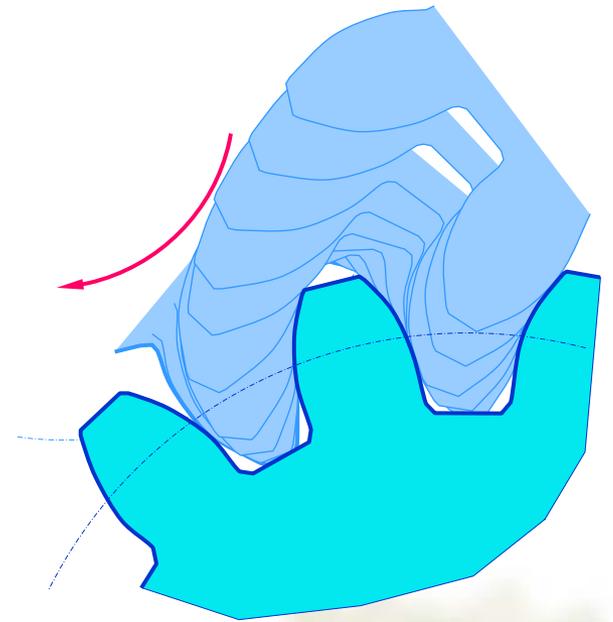
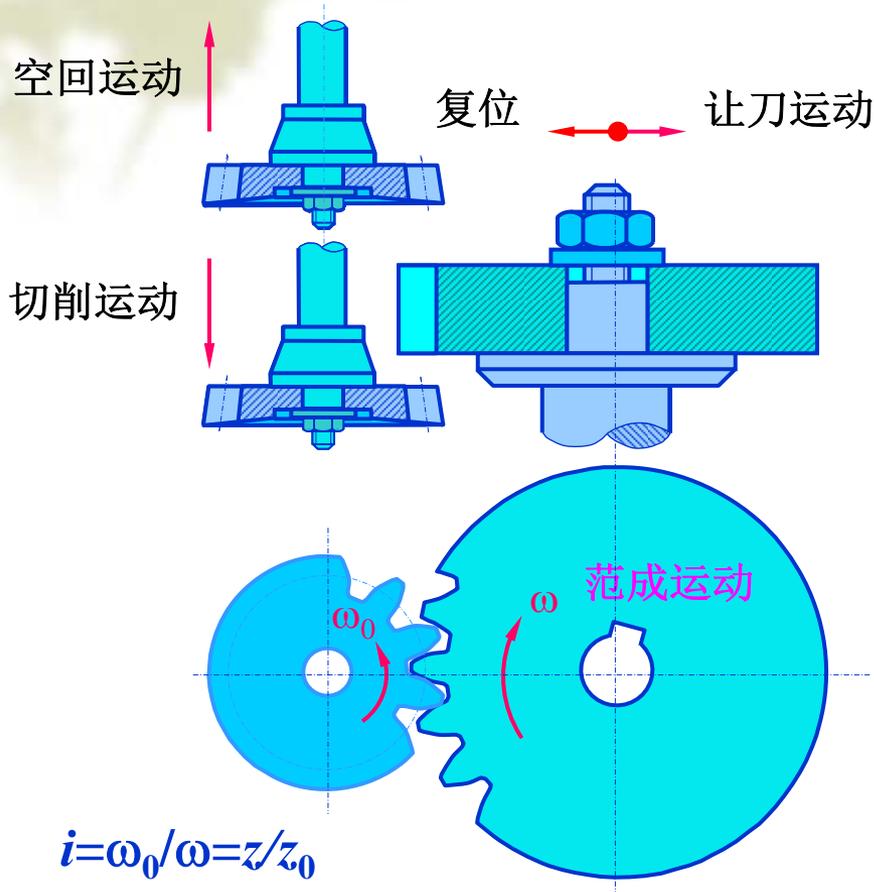
### 2) 切削运动

- ❖ 齿轮插刀沿轮坯轴线方向作往复运动, 以切除材料
- ❖ 相同的  $m$ 、 $\alpha$ , 只要用一把刀具, 通过调节  $i_{12}$ , 就可以加工不同齿数的齿轮



# 范成法—齿轮插刀

## ❖ 动画

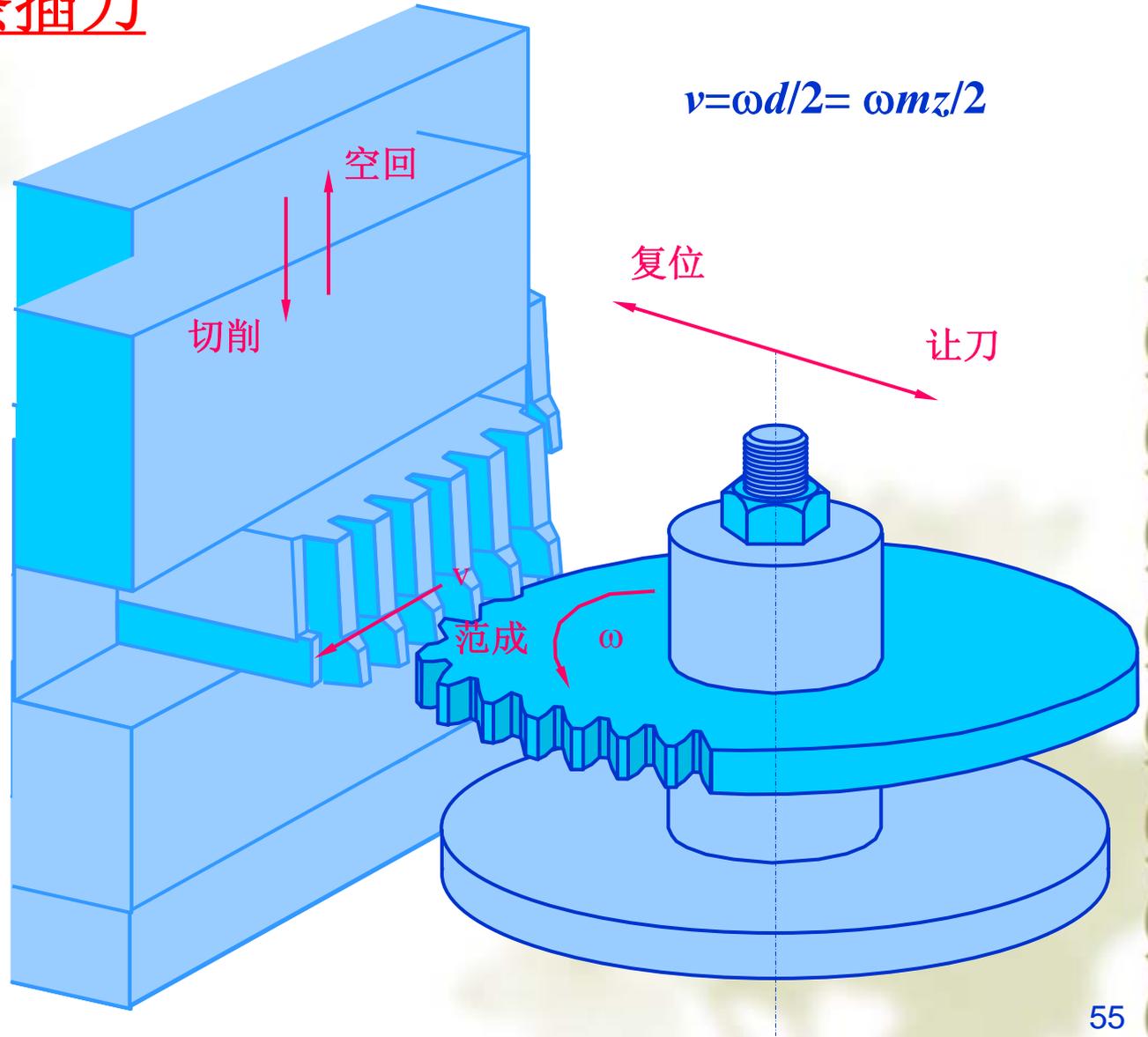


**优点：**同一把刀具可加工出 $m, \alpha$ 相同而齿数不同的所有齿轮。不仅可加工外齿轮，而且可加工内齿轮

**缺点：**加工不连续，生产效率低

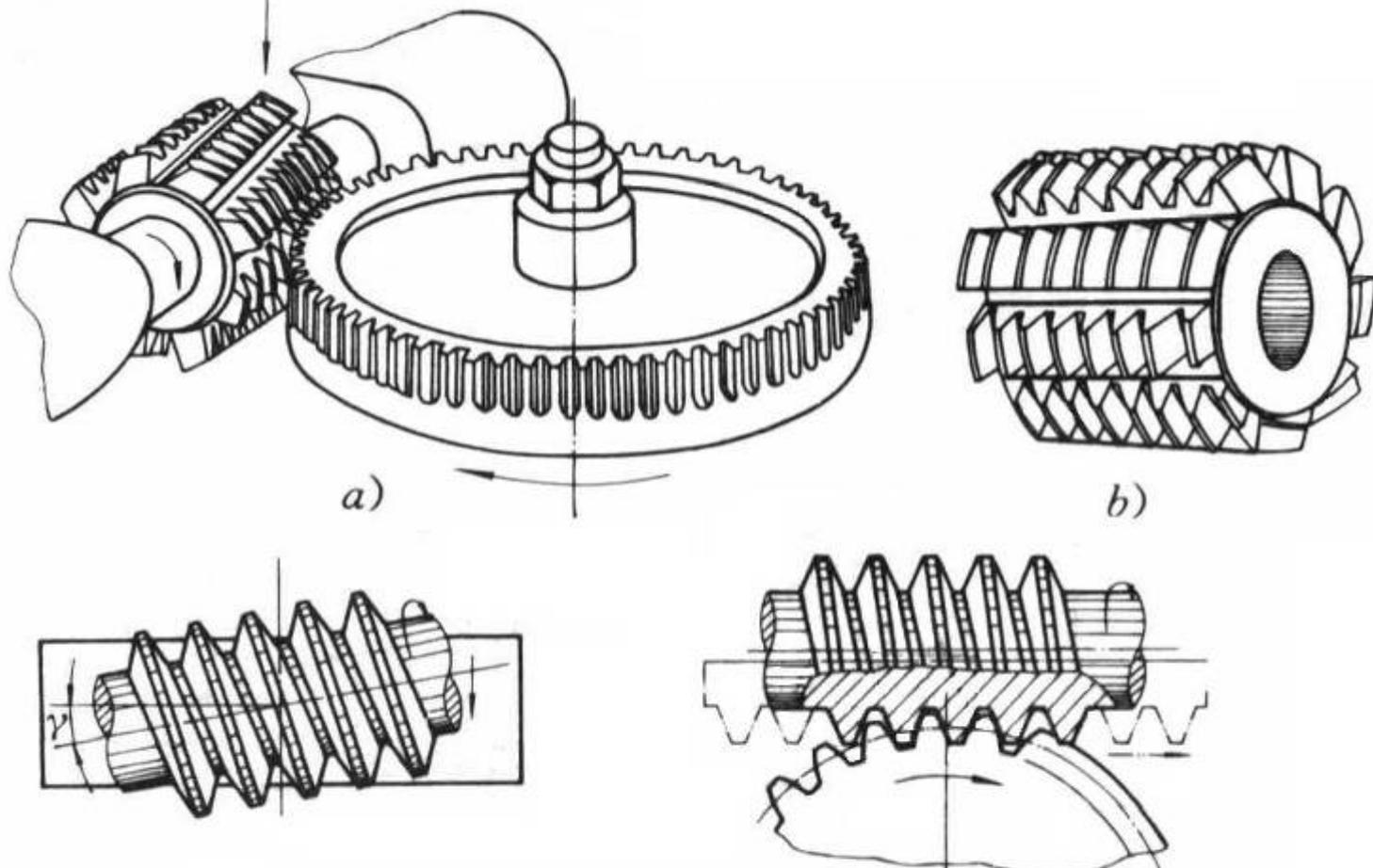
# 范成法—齿条插刀

## ❖ 动画



# 范成法—齿轮滚刀

## ❖ 动画

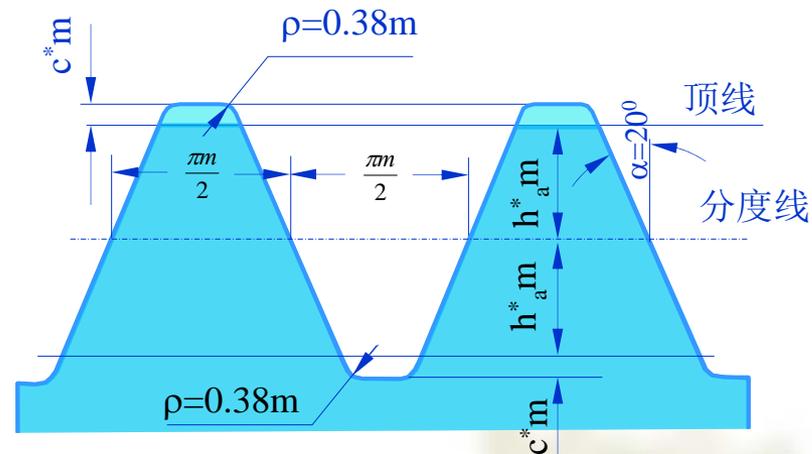


- ❖ **优点：**同一把刀具可加工出 $m$ 、 $\alpha$ 相同而齿数不同的所有齿轮。加工连续，生产效率高
- ❖ **缺点：**不能加工内齿轮

## 2. 用标准齿条型刀具加工齿轮

### (1) 标准齿条型刀具

- ❖ 基准齿形
- ❖ 齿顶比普通齿条多出一段 $c^*m$ ，为圆弧



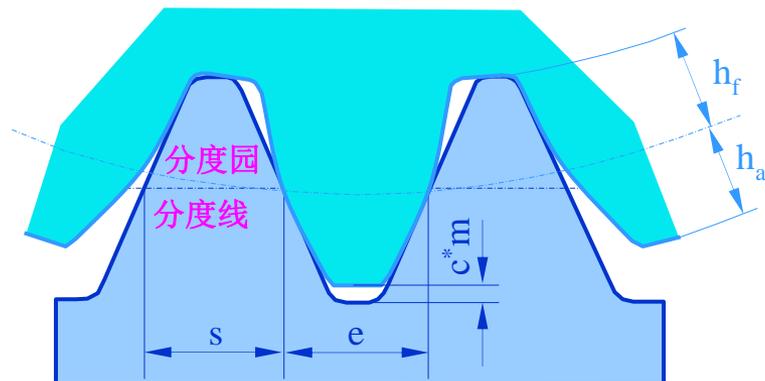
### (2) 用标准齿条型刀具加工标准齿轮

- ❖ 运动：相当于齿轮齿条的啮合传动

### 3. 渐开线齿廓的根切

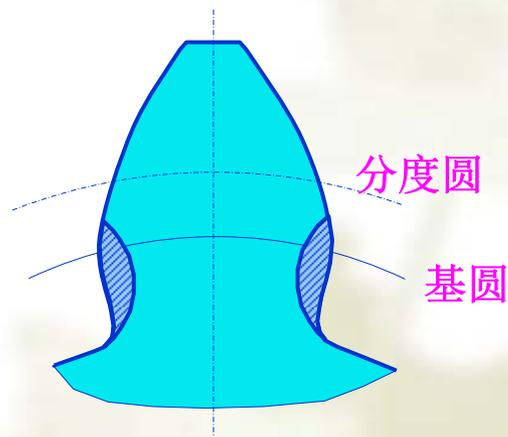
#### (1) 根切

- ❖ 切削刀具的齿顶切去轮齿根部的一部分，这种现象称为根切



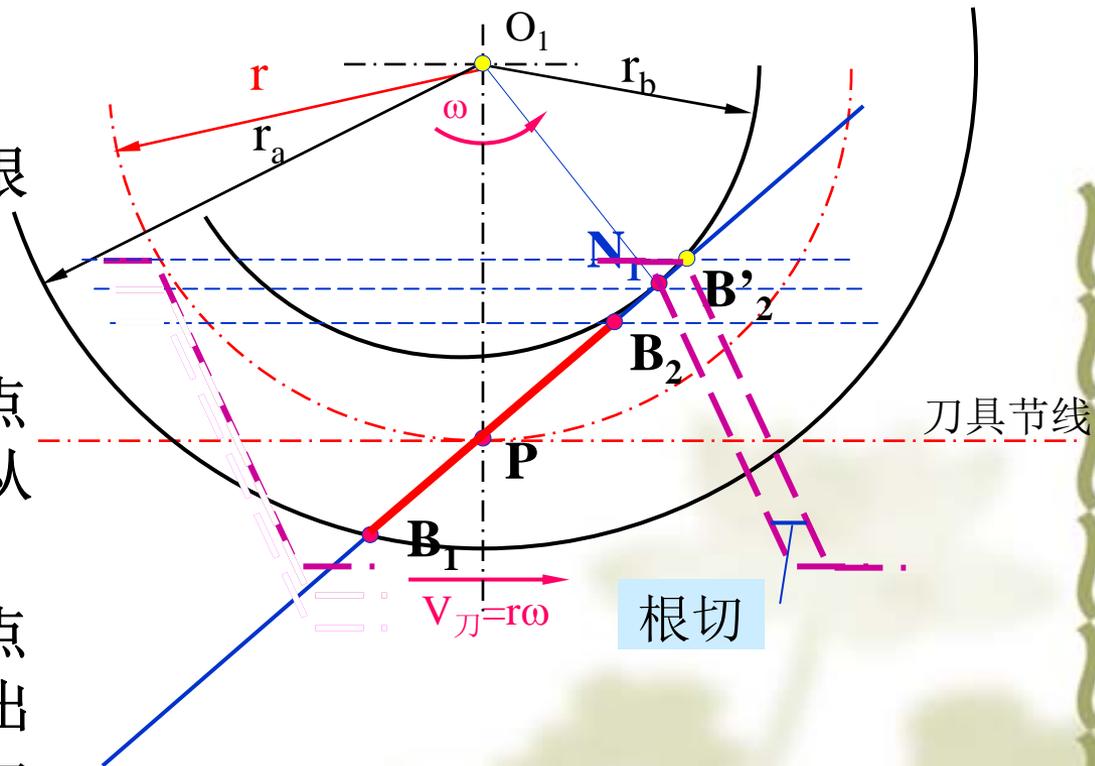
#### (2) 根切的影响

- ❖ 降低轮齿抗弯强度
- ❖ 降低齿轮传动重合度
- ❖ 部分失去渐开线齿轮传动特性



### (3) 产生根切的原因

- ❖ 实际啮合线段： $B_1B_2$
- ❖ 啮合极限点 $N_1$
- ❖ 刀具顶线不超过啮合极限点 $N_1$ ，则切制出渐开线，不产生根切
- ❖ 刀具顶线经过啮合极限点 $N_1$ ，则切制出的渐开线从基圆开始
- ❖ 刀具顶线超过啮合极限点 $N_1$ ，则在根部将已切制出的渐开线切去，形成根切



- ❖ 结论:
- ❖ 刀具顶线超过啮合极限点 $N_1$ ，( $P_{B刀} > P_{N_1}$ )即发生根切

## 4 避免根切的措施

(1) 加大齿轮半径, 使  $P_{N_1} \geq P_{B_{\text{刀}}}$

❖ 其它参数同刀具且标准, 只能增加齿数  $z$

$$\overline{PN_1} = r \sin \alpha = (mz \sin \alpha) / 2$$

$$\overline{PB_{\text{刀}}} = h_a^* m / \sin \alpha$$

$$z \geq 2h_a^* / \sin^2 \alpha$$

❖ 标准齿轮无根切最少齿数

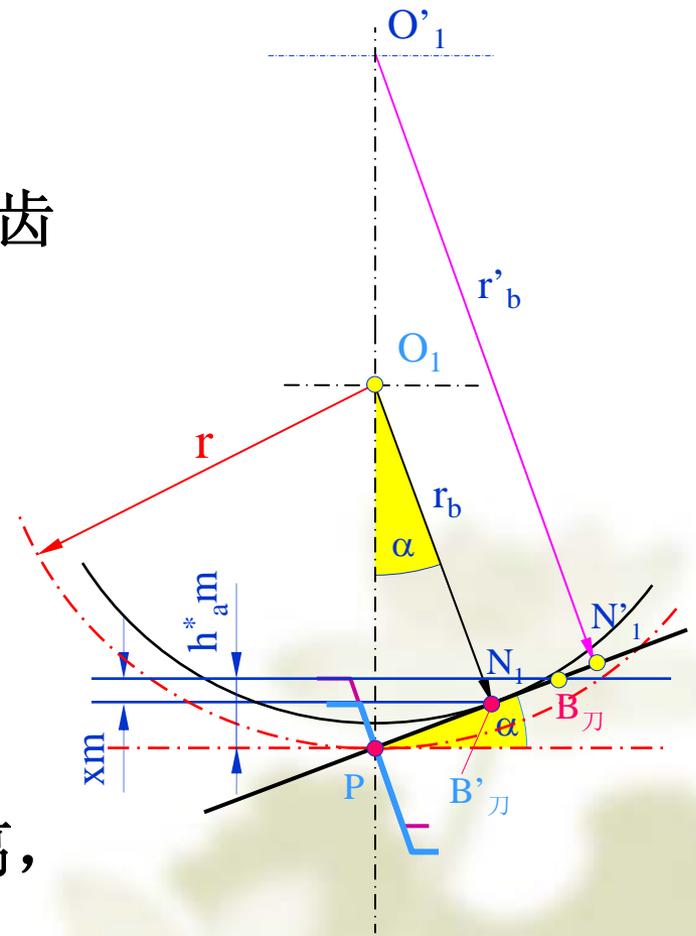
$$z_{\min} = 2h_a^* / \sin^2 \alpha$$

❖ 当  $h_a^* = 1.0$ ,  $\alpha = 20^\circ$  时,  $z_{\min} = 17$

(2) 变位: 加大刀具与齿轮中心距离, 使刀具齿顶线低于  $N_1$

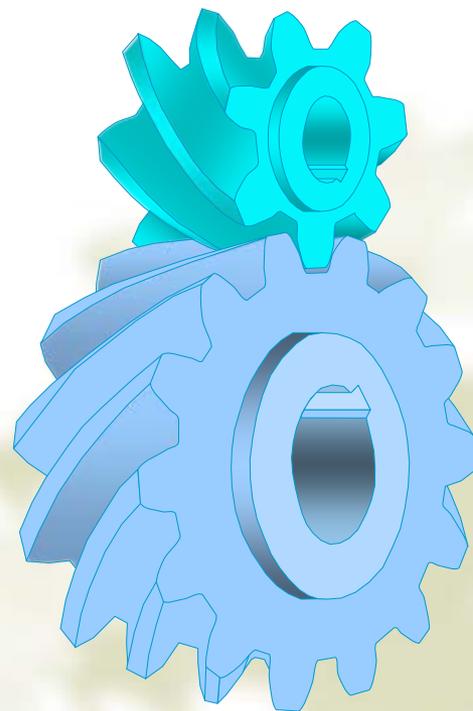
❖ 变位量:  $xm$ , 变位系数  $x$

❖ 正变位齿轮:  $xm > 0$



## § 10-8 斜齿圆柱齿轮传动

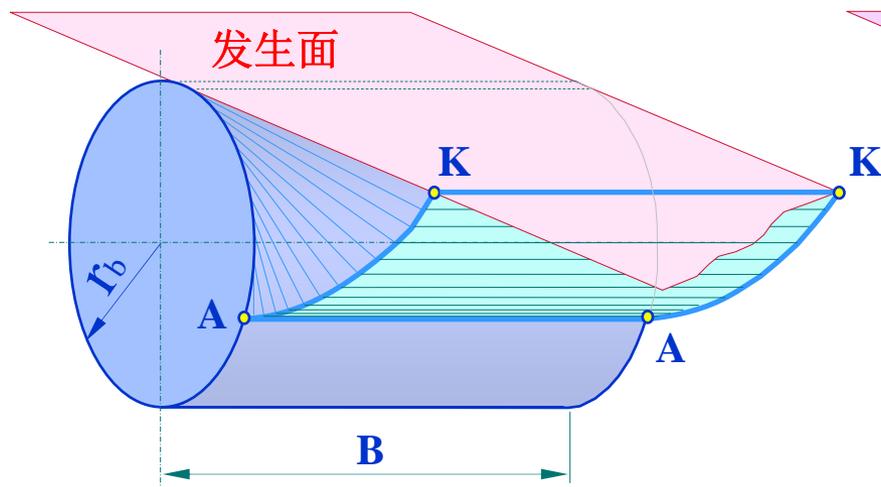
- ❖ 齿廓曲面的形成和啮合特点
- ❖ 基本参数和几何尺寸计算
- ❖ 斜齿轮的啮合传动
- ❖ 斜齿轮传动的特点



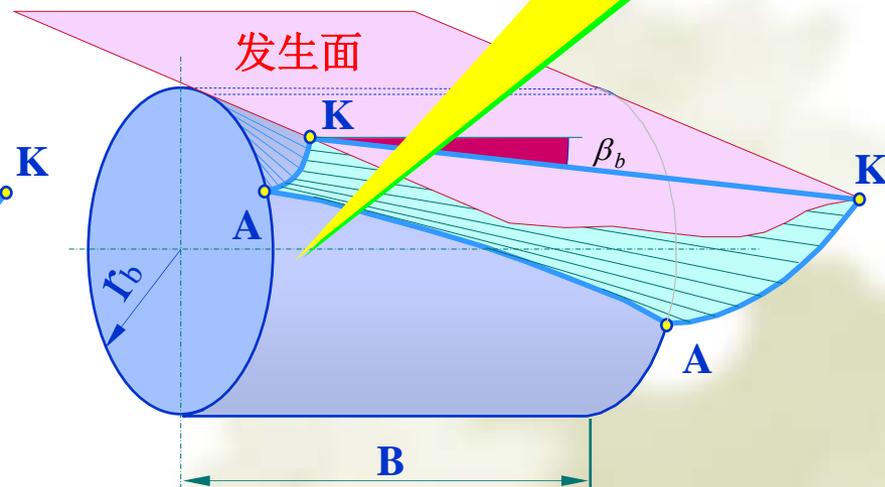
# 0. 齿廓曲面的形成和啮合特点

## (1) 齿廓曲面的形成

- ❖ 发生面在基圆柱上作纯滚动
- ❖ 直：直线KK与母线平行→渐开线柱面
- ❖ 斜：直线KK与母线成 $\beta_b$ 角→渐开线螺旋面



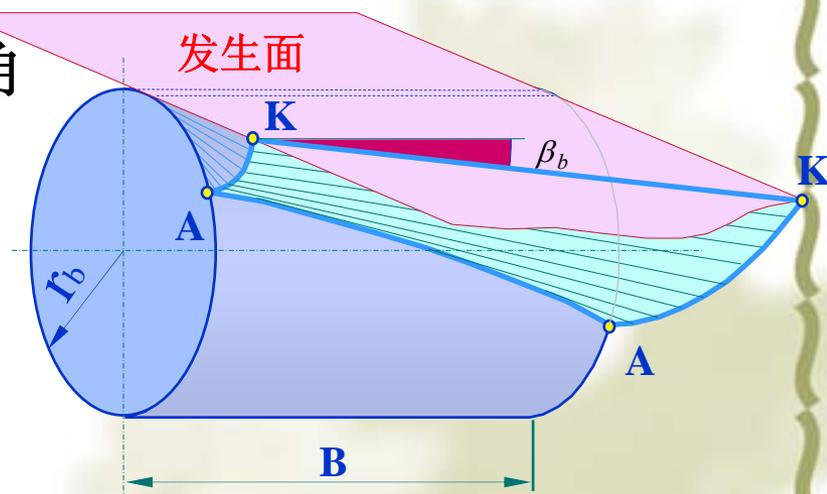
❖ 直齿轮齿廓曲面的形成



斜齿轮齿廓曲面的形成

## 0. 齿廓曲面的形成和啮合特点

- ❖ 渐开线螺旋面齿廓的特点：
  - ❖ ①相切于基圆柱的平面与齿廓曲面的交线为斜直线，它与基圆柱母线的夹角总为  $\beta_b$ ；
  - ❖ ②端面与齿廓曲面的交线为渐开线；  
(每一个端面为一个无限薄的直齿轮)
  - ❖ ③基圆柱及其它圆柱面与齿廓曲面的交线为螺旋线，但它们的螺旋角不相等。



# 不同圆柱螺旋角的关系

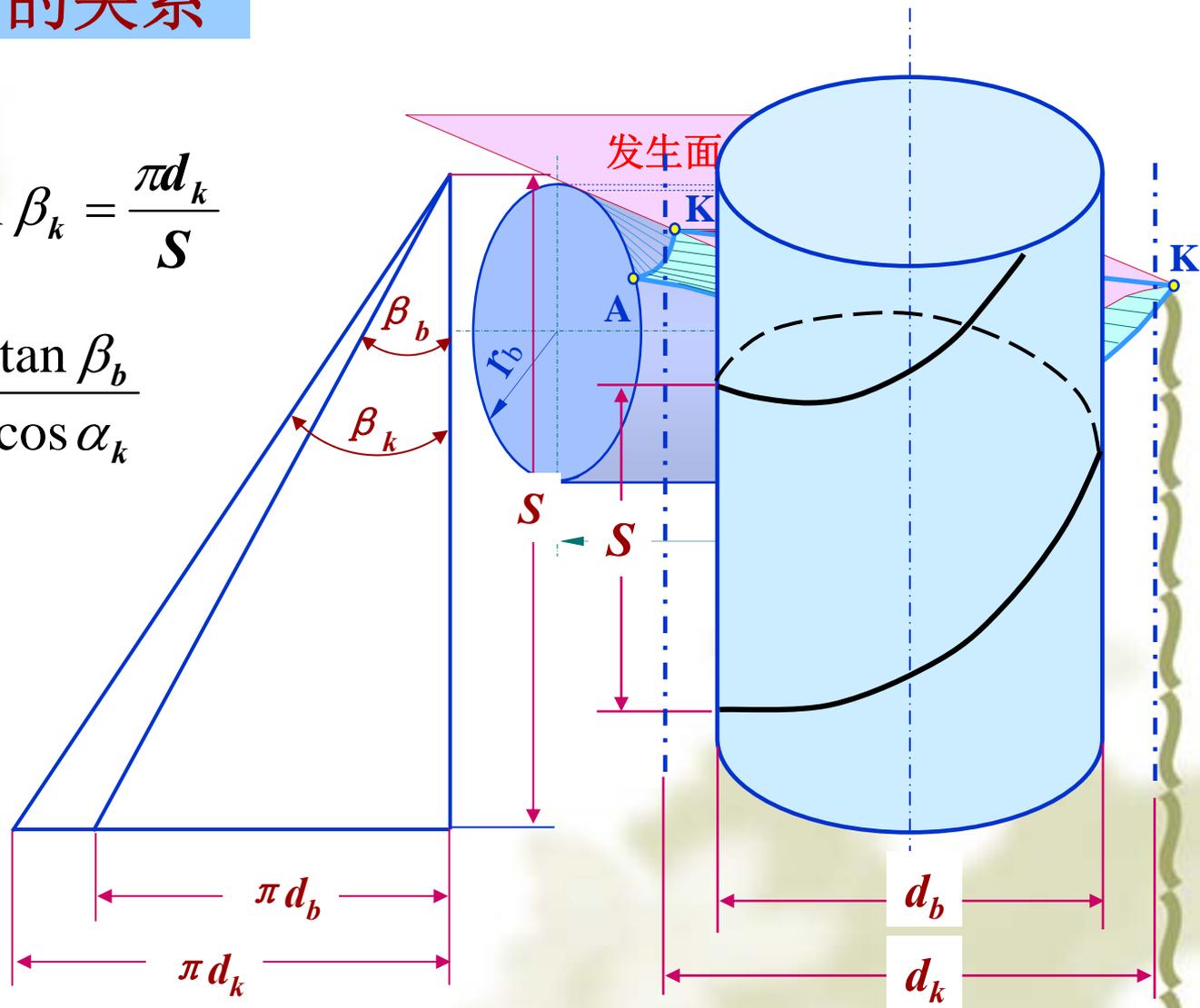
$$\tan \beta_b = \frac{\pi d_b}{S} \quad \tan \beta_k = \frac{\pi d_k}{S}$$

$$\tan \beta_k = \tan \beta_b \frac{d_k}{d_b} = \frac{\tan \beta_b}{\cos \alpha_k}$$

$$\tan \beta_b = \tan \beta_k \cos \alpha_k$$

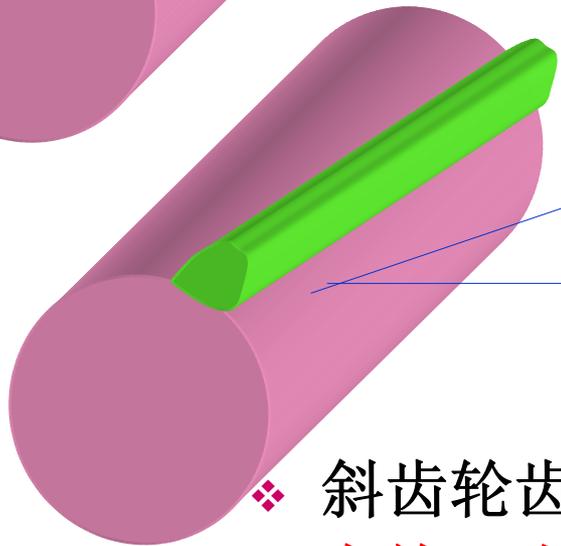
$$\tan \beta_b = \tan \beta \cos \alpha$$

$$\tan \beta_b = \tan \beta \cos \alpha_t$$



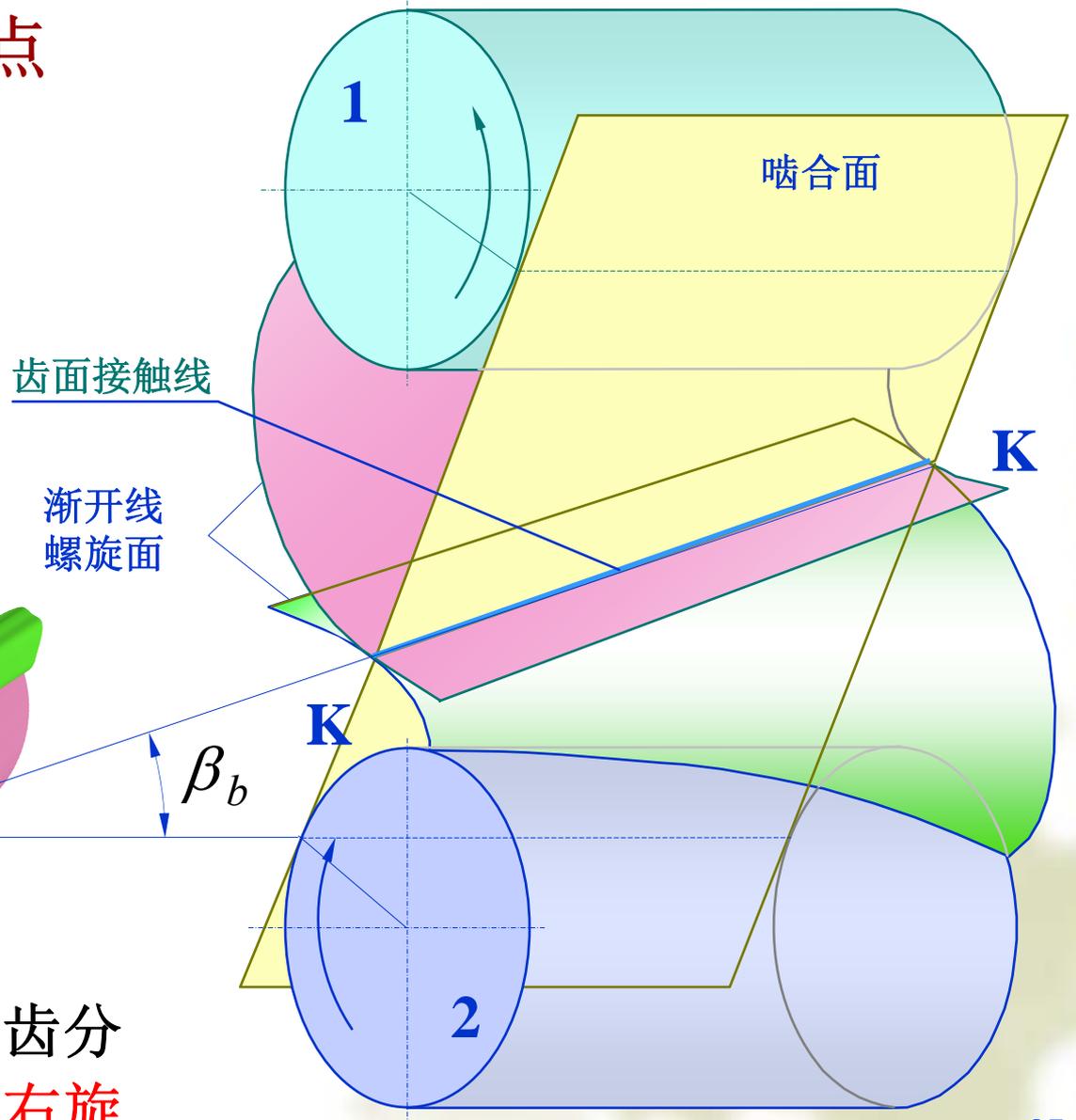
## (2) 斜齿轮啮合特点

❖ 直齿轮齿

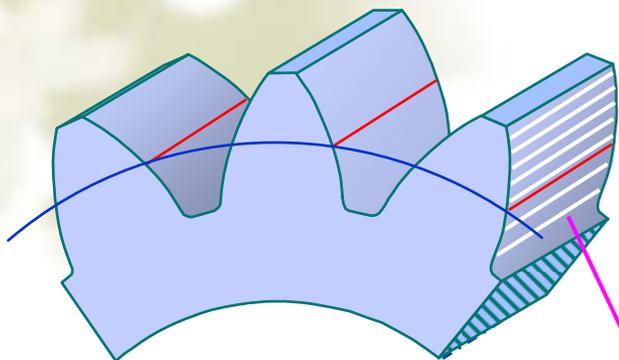


❖ 斜齿轮齿分

❖ 左旋、右旋



# 啮合特点



直齿圆柱齿轮

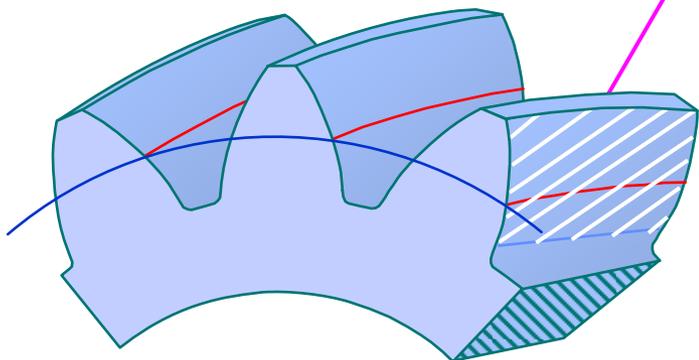
## 直齿轮:

- ❖ 齿面接触线与齿向(轴线)平行
- ❖ 突然进入/脱离啮合(加载/卸载)
- ❖ 传动平稳性差, 冲击, 振动, 噪音大

## 齿面接触线

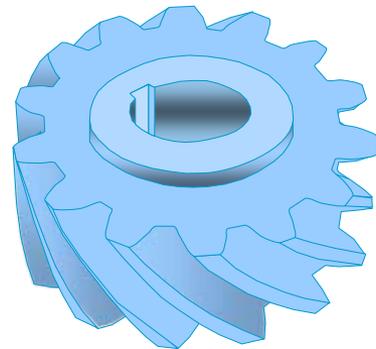
## 斜齿轮:

- ❖ 齿面接触线为斜线
- ❖ 逐渐进入/脱离啮合(加载/卸载)
- ❖ 传动平稳, 冲击, 振动, 噪音小



斜齿圆柱齿轮

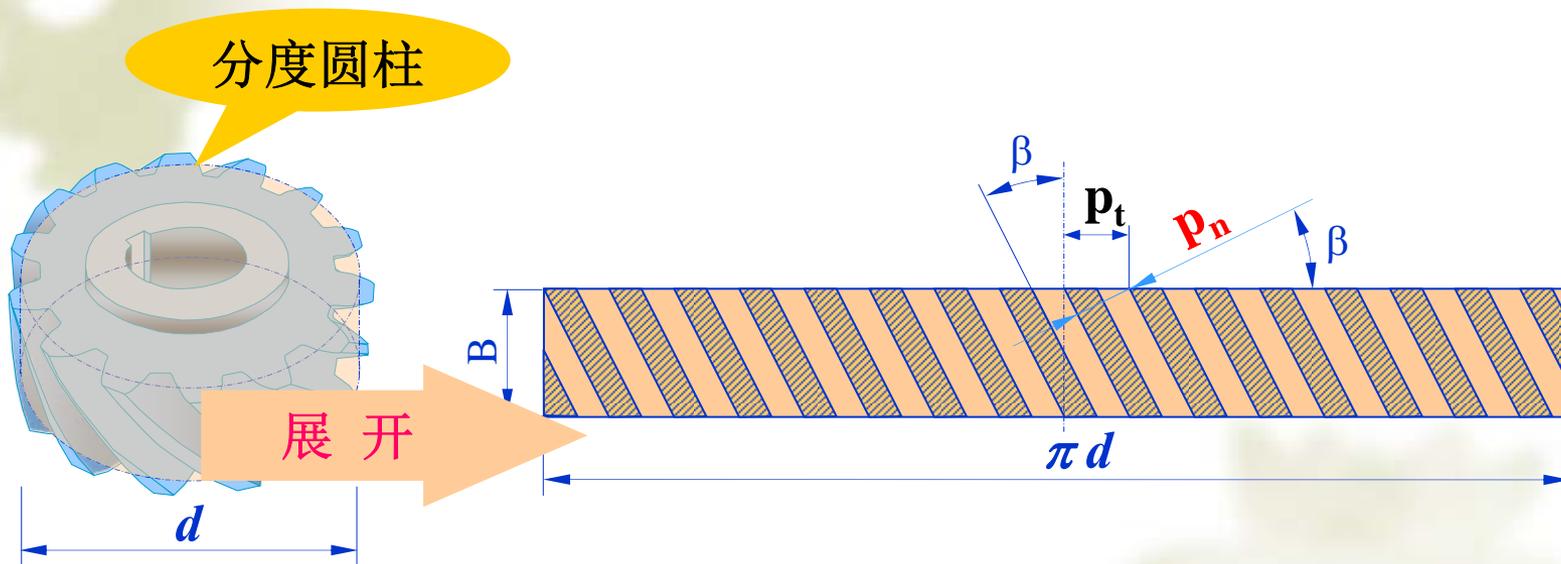
# 1. 斜齿轮的基本参数与几何尺寸计算



问题:

- ❖ ? 端面齿形与法面齿形
- ❖ ? 加工过程刀具与轮齿的相对位置与进刀方向
- ❖ ? 标准参数所在平面
- ❖ ? 端、法面哪个面上表达尺寸更为简洁、明了
- ❖ ✓ 端、法面参数不同!
- ❖ ✓ 标准参数在法面上, 端面表达尺寸简洁、明了!
- ❖ ✓ 法面参数为标准参数, 将其换算至端面上, 在端面上计算斜齿轮的几何尺寸

# (1) 法面模数 $m_n$ 与端面模数 $m_t$



❖ 端面参数(t)、法面参数(n)

❖ 端面齿距  $p_t$  与法面齿距  $p_n$  关系

$$p_n = \pi m_n = p_t \cos \beta = \pi m_t \cos \beta$$

➡  $m_t = m_n / \cos \beta$

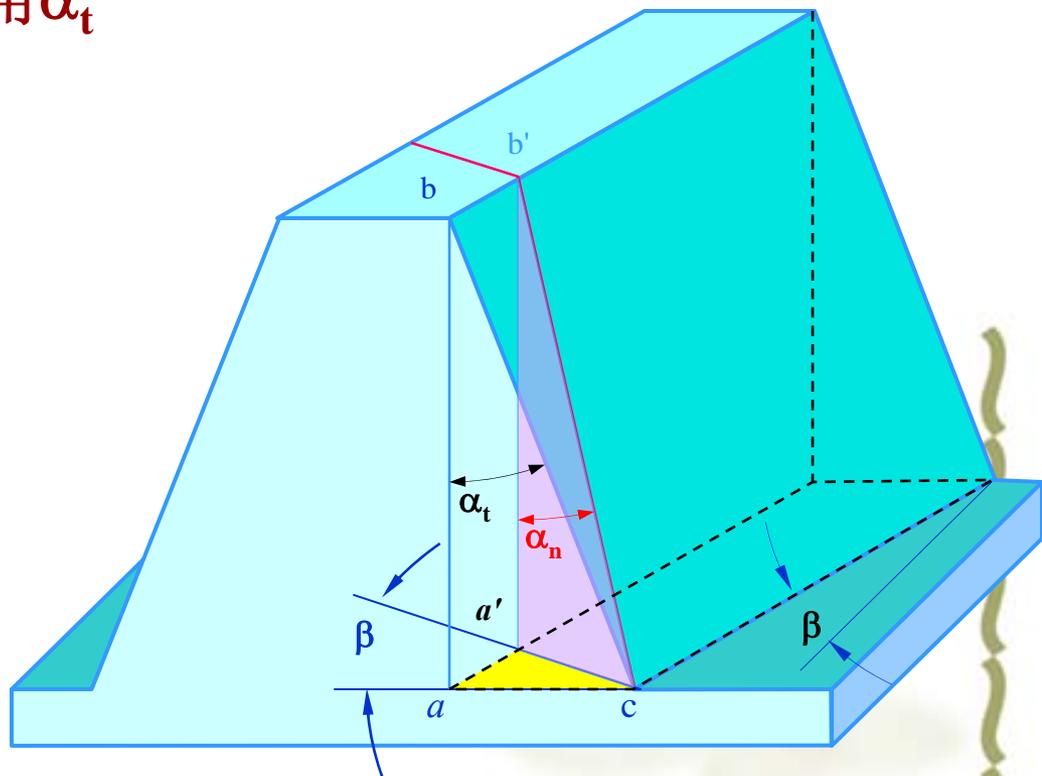
## (2) 法面压力角 $\alpha_n$ 与端面压力角 $\alpha_t$

$$\tan \alpha_n = \frac{\overline{a'c}}{\overline{a'b'}} \quad \tan \alpha_t = \frac{\overline{ac}}{\overline{a'b'}}$$

$$\overline{ab} = \overline{a'b'} \quad \overline{a'c} = \overline{ac} \cdot \cos \beta$$

$$\tan \alpha_t = \tan \alpha_n / \cos \beta$$

另外,齿顶高、齿根高、齿全高在法面和端面均相同, 故



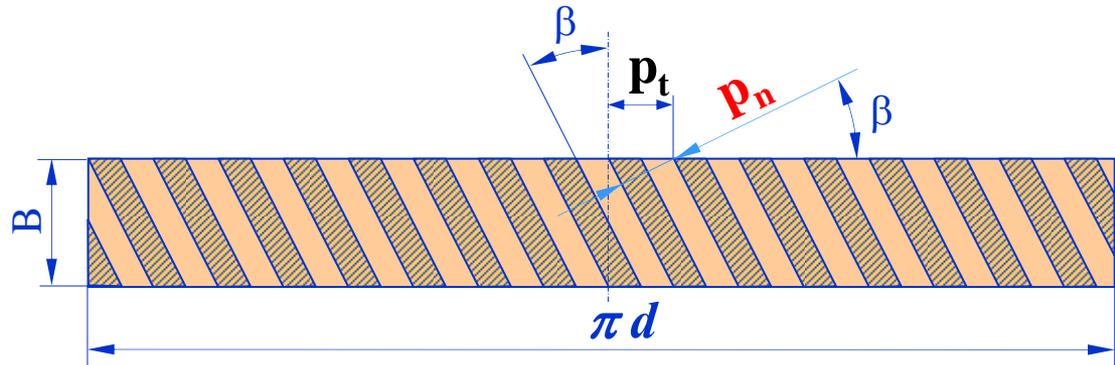
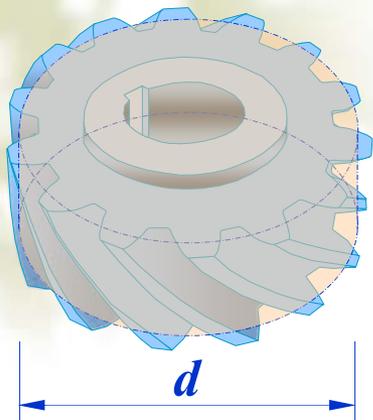
$$h_{at} = h_{an}, \quad h_{at}^* m_t = h_{an}^* m_n = h_{at}^* \frac{m_n}{\cos \beta}$$

$$h_{at}^* = \frac{h_{an}^*}{\cos \beta} \text{ (非标准)}$$

6个定,一切定:

$m_n, z, a_n, h_{an}^*, c_n^*, \beta$

### (3) 几何尺寸计算



分度圆直径  $d = ?$        $d = m_t z = \frac{m_n z}{\cos \beta}$

中心距  $a = ?$        $a = r_1 + r_2 = \frac{m_n (z_1 + z_2)}{2 \cos \beta}$

其余见P.336表10-5

表 10-5 斜齿圆柱齿轮的参数及几何尺寸的计算公式

名 称	符号	计算公式
螺旋角	$\beta$	(一般取 $8^\circ \sim 20^\circ$ )
基圆柱螺旋角	$\beta_b$	$\tan \beta_b = \tan \beta \cos \alpha_t$
法面模数	$m_n$	(按表 10-1, 取标准值)
端面模数	$m_t$	$m_t = m_n / \cos \beta$
法面压力角	$\alpha_n$	$\alpha_n = 20^\circ$
端面压力角	$\alpha_t$	$\tan \alpha_t = \tan \alpha_n / \cos \beta$
法面齿距	$p_n$	$p_n = \pi m_n$
端面齿距	$p_t$	$p_t = \pi m_t = p_n / \cos \beta$
法面基圆齿距	$p_{bn}$	$p_{bn} = p_n \cos \alpha_n$
法面齿顶高系数	$h_{an}^*$	$h_{an}^* = 1$
法面顶隙系数	$c_n^*$	$c_n^* = 0.25$

分度圆直径	$d$	$d = z m_t = z m_n / \cos \beta$
基圆直径	$d_b$	$d_b = d \cos \alpha_t$
最少齿数	$z_{\min}$	$z_{\min} = z_{v\min} \cos^3 \beta$
端面变位系数	$x_t$	$x_t = x_n \cos \beta$
齿顶高	$h_a$	$h_a = m_n (h_{an}^* + x_n)$
齿根高	$h_f$	$h_f = m_n (h_{an}^* + c_n^* - x_n)$
齿顶圆直径	$d_a$	$d_a = d + 2h_a$
齿根圆直径	$d_f$	$d_f = d - 2h_f$
法面齿厚	$s_n$	$s_n = (\pi/2 + 2x_n \tan \alpha_n) m_n$
端面齿厚	$s_t$	$s_t = (\pi/2 + 2x_t \tan \alpha_t) m_t$
当量齿数	$z_v$	$z_v = z / \cos^3 \beta$

注： $m_t$  应计算到小数后第四位，其余长度尺寸应计算到小数后三位。

## 2. 一对斜齿轮的啮合传动

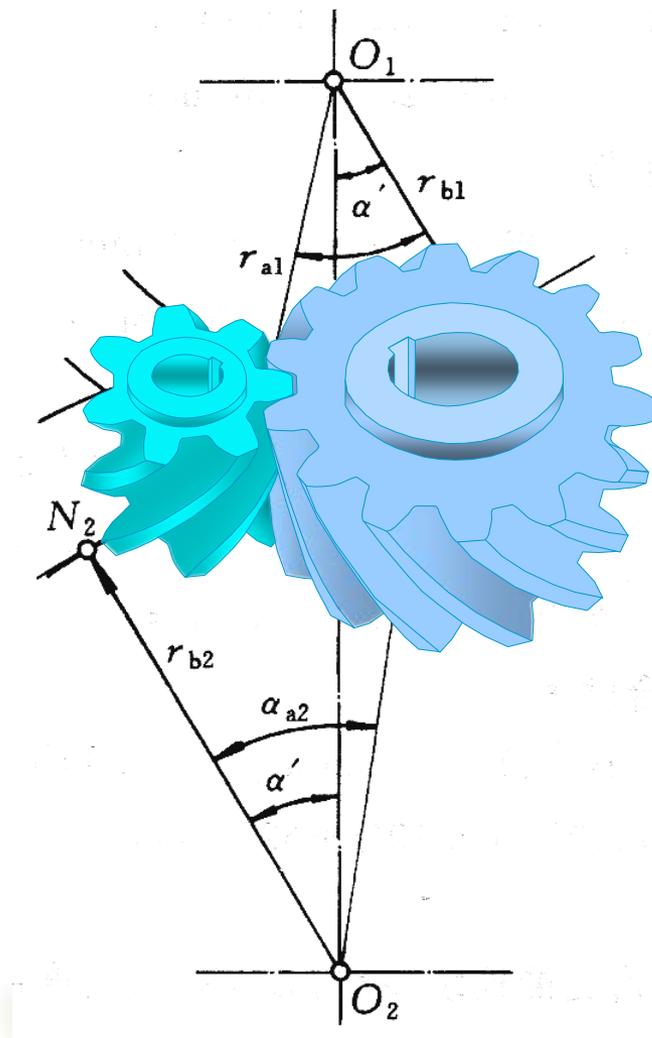
### 2.1 正确啮合条件

$$\left. \begin{array}{l} m_{t1} = m_{t2} \\ \alpha_{t1} = \alpha_{t2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m_{n1} = m_{n2} \\ \alpha_{n1} = \alpha_{n2} \end{array} \right.$$
$$\beta_1 = \mp \beta_2 \text{ (外-，内+)}$$

### 2.2 斜齿轮传动的重合度

$$\text{直: } \varepsilon_{\alpha} = \frac{\overline{B_1 B_2}}{P_b}$$

重合度 =  $\frac{\text{一对轮齿从开始进入啮合到退出啮合走过的啮合线长度}}{\text{法向齿距 (基圆齿距)}}$



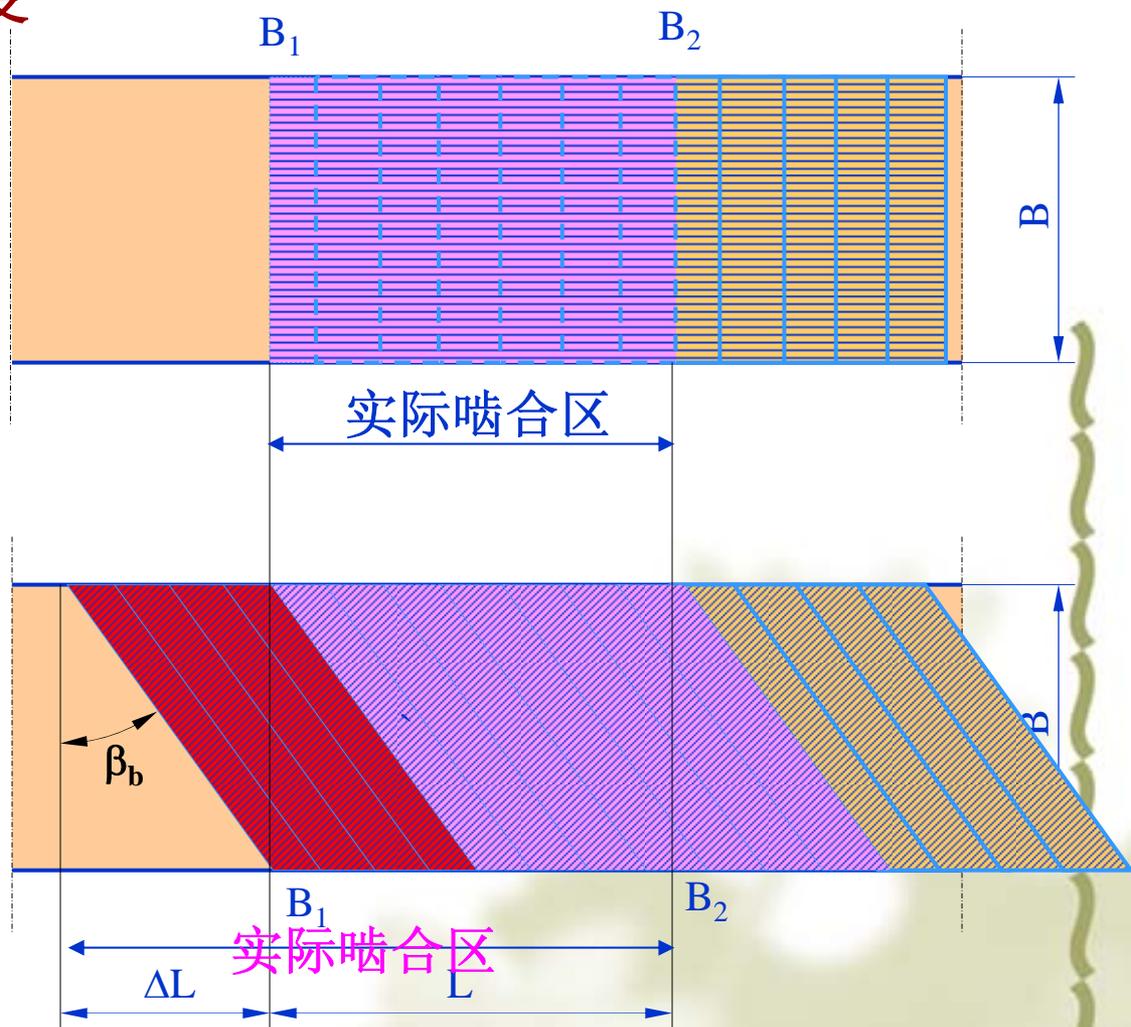
## 2.2 斜齿轮传动的重合度

直: 
$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{L}{p_{bt}}$$

斜: 
$$\varepsilon_{\gamma} = \frac{L + \Delta L}{p_{bt}} = \frac{L}{p_{bt}} + \frac{\Delta L}{p_{bt}}$$

$$\varepsilon_{\gamma} = \varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta}$$

轴面重合度  
端面重合度



## 2.2 斜齿轮传动的重合度

$$\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta$$

$$\varepsilon_\beta = \frac{\Delta L}{p_{bt}} = \frac{B \tan \beta_b}{p_{bt}} = \frac{B \tan \beta \cos \alpha_t}{p_t \cos \alpha_t} = \frac{B \tan \beta}{p_t} = \frac{B \tan \beta}{p_n / \cos \beta} = \frac{B \sin \beta}{\pi m_n}$$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{2\pi} \left[ z_1 (\tan \alpha_{at1} - \tan \alpha_t') + z_2 (\tan \alpha_{at2} - \tan \alpha_t') \right]$$

### 3. 斜齿轮的当量齿轮与当量齿数



#### 问题：

- ❖ ? 仿形法加工斜齿轮如何确定刀号
- ❖ ? 范成法加工斜齿轮，无根切最少齿数如何确定
- ❖ ? 与法面齿形相当的直齿轮是什么样的齿轮
- ❖ ✓ 法面齿形与刀具齿形相同，仿形法加工斜齿轮应按法面齿形确定刀号
- ❖ ✓ 无根切最少齿数应依法面齿形为依据
- ❖ **当量齿轮**：与斜齿轮法面齿形相当的虚拟的直齿圆柱齿轮
- ❖ **当量齿数  $z_v$** ：当量齿轮的齿数

# 当量齿轮与当量齿数

椭圆:  $a = \frac{d}{2 \cos \beta}$      $b = \frac{d}{2}$

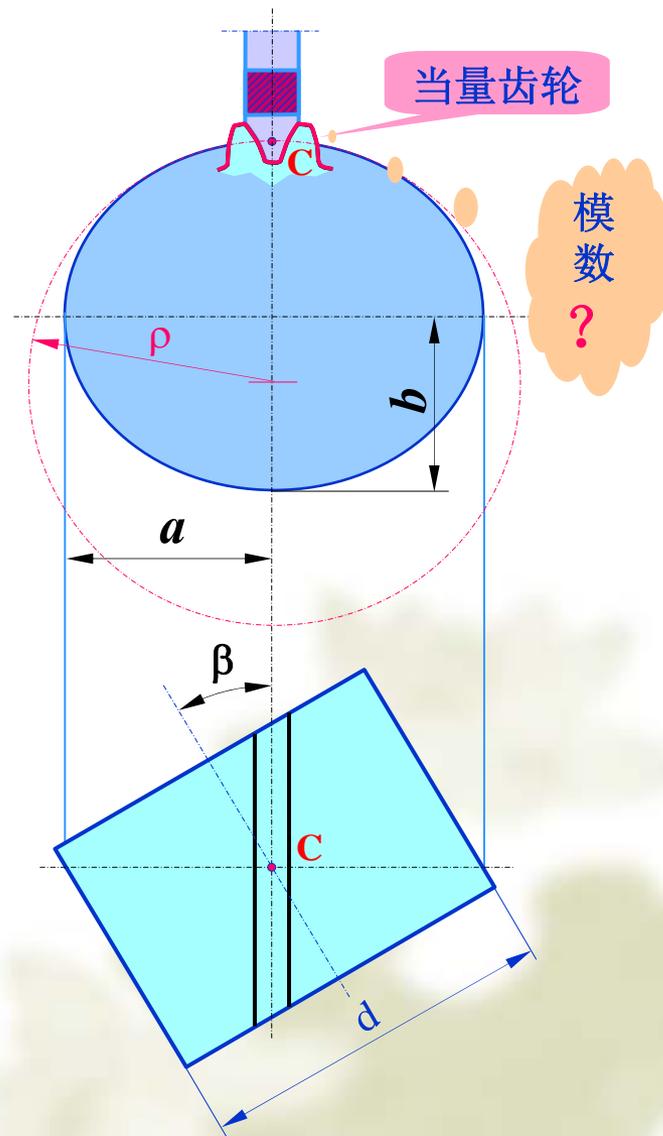
节点处曲率半径  $\rho = \frac{a^2}{b} = \frac{d}{2 \cos^2 \beta}$

❖ 当量齿轮的当量齿数  $z_v$ :

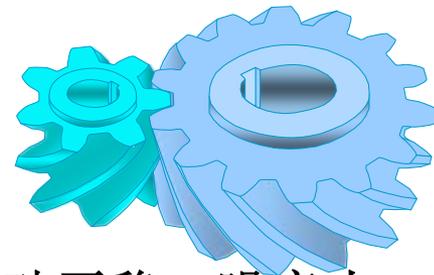
$$z_v = \frac{2\rho}{m_n} = \frac{d}{m_n \cos^2 \beta} = \frac{z m_t}{m_n \cos^2 \beta}$$
$$= \frac{z}{\cos^3 \beta}$$

❖ 当量齿轮(数)的意义:

- ☞ 据  $z_v$  选铣刀
- ☞ 无根切最少齿数  $z_{\min} = z_{v\min} \cos^3 \beta$
- ☞ 计算轮齿强度



## 4. 斜齿轮传动的特点

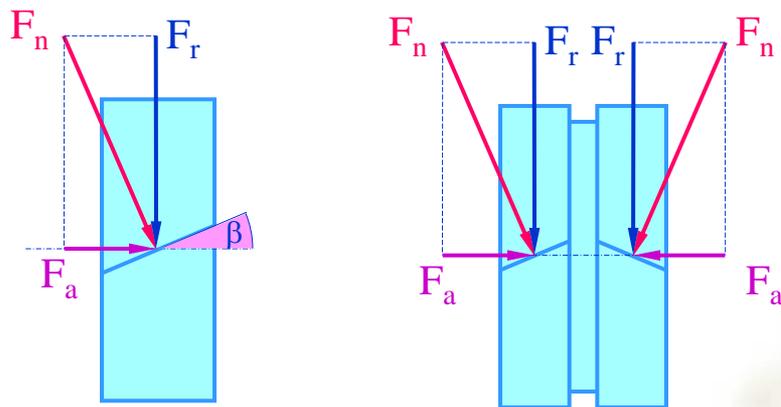


### 优点:

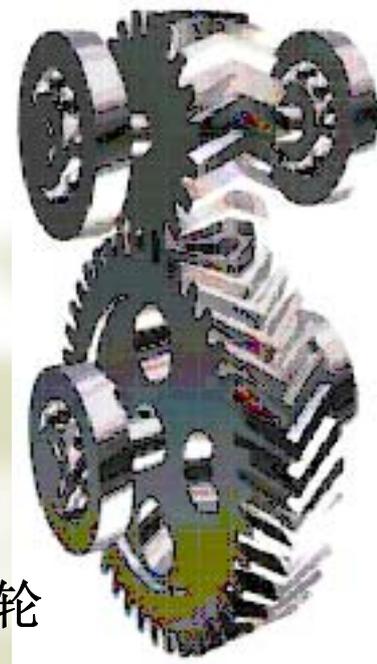
- ❖ 啮合性能好: 轮齿进入和脱离啮合渐进渐退, 传动平稳, 噪音小
- ❖ 重合度大: 相对提高齿轮承载能力, 延长寿命
- ❖ 范成加工不易根切
- ❖ 制造成本与直齿轮同

### 缺点:

- ❖ 工作时产生轴向力: 螺旋角越大, 轴向力越大
- ❖ 解决: 控制螺旋角大小、人字齿



$$F_a = F_t \operatorname{tg}\beta$$



人字齿轮